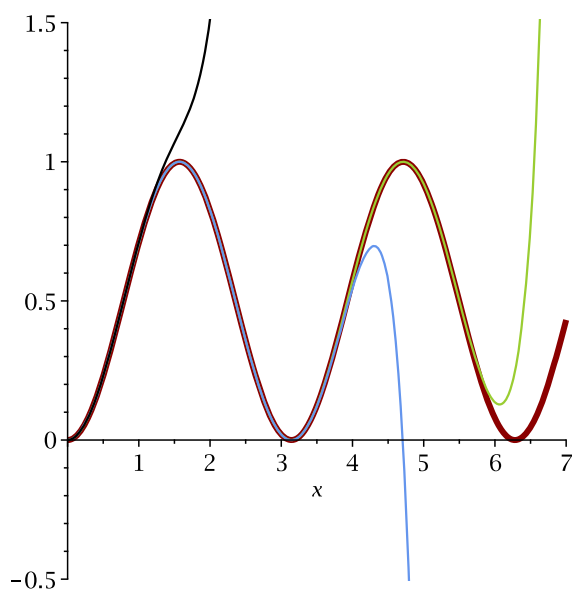




Differentiation

1

Teil I



1.1	Größenordnungssymbole	4
1.2	Ableitungen und Differentiale	7
1.3	Taylor-Reihen	11
	Worksheet 1: Funktionen, Ableitungen und Taylor-Reihen	14
	Aufgaben	18
	Lösungen	19

Landau'sche Größenordnungssymbole O und o

Unendlich kleine Größen ermöglichen ein intuitives Verständnis von Ableitungen und Differentialen. Dabei ist entscheidend, dass es verschiedene Arten von „unendlich klein“ gibt: Eine unendlich kleine Größe x kann durchaus viel größer sein als eine andere unendlich kleine Größe y . Die mathematisch exakte Beschreibung dieses Umstands geschieht mithilfe des Grenzwertbegriffs. In konkreten Rechnungen bieten die Landau'schen Größenordnungssymbole O und o nützliche Orientierungen. Sie präzisieren die Bedeutung und Gültigkeit der notwendigen, anfangs aber mitunter verwirrenden Näherungen in der differentiellen Modellbildung.

1.1 Größenordnungssymbole

Es seien f und g zwei Funktionen einer reellen Veränderlichen x , die für $x \neq x_0$ verschieden von null sind, im Limes $x \rightarrow x_0$ aber gegen null streben. Beide werden also in diesem Sinne bei $x \rightarrow x_0$ unendlich klein. Man schreibt¹

$$f(x) = O(g(x)) \quad \text{falls} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq C \quad (1.1)$$

gilt, wobei C eine positive reelle Konstante bezeichnet, und

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{falls} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad (1.2)$$

ist. Im ersten Fall, $f(x) = O(g(x))$, gilt oft

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = C, \quad (1.3)$$

man nennt $f(x)$ und $g(x)$ dann unendlich kleine Größen *gleicher Ordnung*. Im zweiten Fall, $f(x) = o(g(x))$ ², ist $f(x)$ hingegen nochmals „deutlich kleiner“ als $g(x)$, da nicht nur $f(x)$, sondern auch der Quotient $f(x)/g(x)$ für $x \rightarrow x_0$ gegen null strebt. Man bezeichnet $f(x)$ dann im Vergleich mit $g(x)$ als unendlich kleine Größe *höherer Ordnung*. In diesen Definitionen sind die Möglichkeiten $x_0 = \pm\infty$ eingeschlossen.

Beispiel 1.1

Für $x \rightarrow 0$ ist

$$x^4 + 4x^3 + x = O(x), \quad (1.4)$$

denn mit $f(x) = x^4 + 4x^3 + x$ und $g(x) = x$ ist (1.3) mit $C = 1$ erfüllt. Anschaulich gesprochen ist von den drei Termen auf der linken Seite von (1.4) der letzte für kleine x der größte (setzen Sie zum Beispiel $x = 0.1$ und dann $x = 0.01$ ein) und dominiert den Ausdruck im betrachteten Grenzfall, siehe auch Abb. 1.1 links. ◀

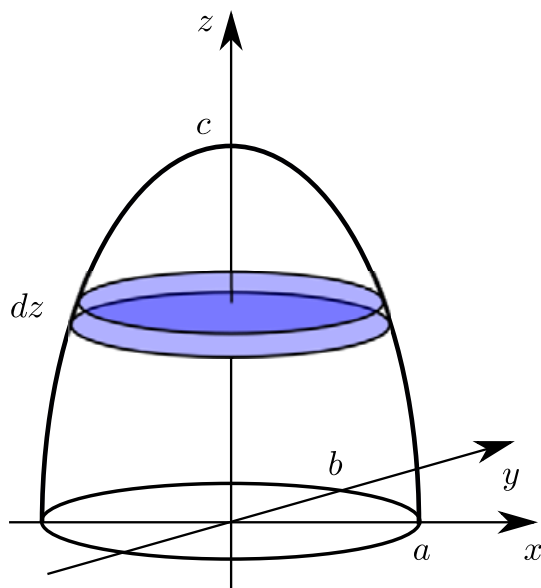
¹ Lies „ f von x ist groß O von g von x .“

² Lies „ f von x ist klein o von g von x .“



2

Integration



2.1	Volumenberechnung	26
2.2	Der Hauptsatz der Infinitesimalrechnung	30
2.3	Methoden zur Integralberechnung	32
	Worksheet 2: Integration	37
	Aufgaben	40
	Lösungen	41

Unendlich kleine Größen erlauben ein anschauliches Verständnis des Integralbegriffs und der grundlegenden Integrationsregeln. Im vorliegenden Kapitel werden einige dieser Regeln für Funktionen einer Veränderlichen unter diesem Blickwinkel zusammengestellt. Auch der Hauptsatz der Infinitesimalrechnung, der den engen Zusammenhang zwischen Differential- und Integralrechnung dokumentiert, findet eine intuitive Begründung.

2.1 Volumenberechnung

Die Unterscheidung unendlich kleiner Größen bezüglich ihrer Ordnung macht die Berechnung von allgemeinen Flächeninhalten und Volumina möglich. Im folgenden Beispiel wird gezeigt, wie die Suche nach einer immer besseren Näherung für das Volumen eines Kegels praktisch unausweichlich auf den Integralbegriff führt.

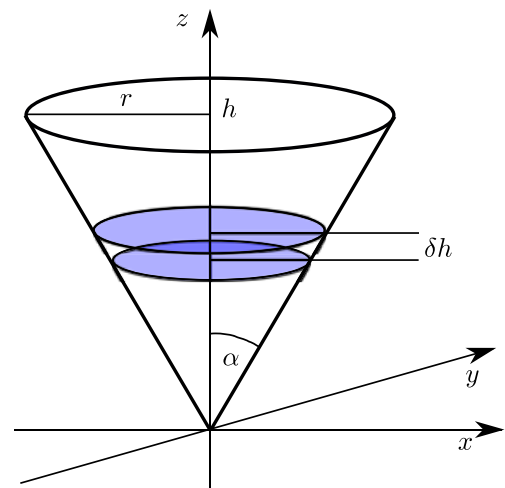
Beispiel 2.1

Wir wollen das Volumen V eines Kreiskegels mit Höhe h und Öffnungswinkel α bestimmen, vgl. Abb. 2.1. In Ermangelung einer expliziten Formel versuchen wir zunächst, brauchbare Näherungen für V zu finden. Der Kegel kann in einen Zylinder mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe eingeschlossen werden. Für das Volumen des Zylinders ist der Ausdruck $V_Z = \pi r^2 h$ bekannt und plausibel. Mit $r = h \tan \alpha$ für den Radius der Grundfläche erhalten wir daraus

$$V < V_Z = \pi r^2 h = \pi h^3 \tan^2 \alpha. \quad (2.1)$$

Diese obere Schranke ist eine sehr grobe Approximation des Kegelvolumens. Insbesondere berücksichtigt sie nicht, dass sich der Radius des Kegels mit der Höhe ändert, während der

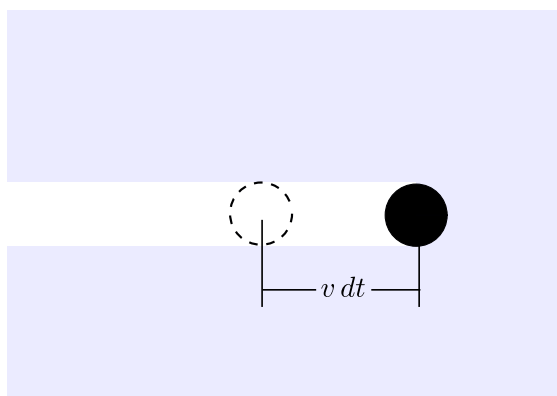
Abb. 2.1 Zur Berechnung des Volumens V eines Kreiskegels mit Öffnungswinkel α und Höhe h ist es sinnvoll, den Kegel parallel zur Grundfläche in Scheiben der Dicke δh zu zerschneiden





3

Differentielle Modellbildung



3.1	Rekursionen	48
3.2	Differentialgleichungen	51
	Aufgaben	58
	Lösungen	59

Bei der Analyse experimenteller Situationen ist es oft einfacher, die Änderung einer gesuchten Funktion bei Änderungen ihrer Argumente zu charakterisieren, als diese Funktion selbst direkt zu bestimmen. Für ganzzahlige Veränderliche führt dieses Vorgehen auf Rekursionsbeziehungen, die in vielen Fällen durch Iteration gelöst werden können. Bei Funktionen kontinuierlicher Veränderlicher kann die Differenz zwischen den beiden Argumentwerten beliebig klein werden. Kleine Größen höherer Ordnung lassen sich dann in konsistenter Weise vernachlässigen, was das Verfahren sehr leistungsfähig macht. Viele Grundgleichungen der Physik können auf diese Weise hergeleitet werden. Ergibt sich dabei ein expliziter Ausdruck für die Ableitung der gesuchten Funktion, so kann diese durch direkte Integration berechnet werden. Das ist jedoch nur selten der Fall. Typischerweise wird der gewonnene Ausdruck für die Ableitung auch die gesuchte Funktion selbst enthalten. Die differentielle Modellbildung führt dann auf eine Differentialgleichung – eine Beziehung zwischen der gesuchten Funktion und ihrer Ableitung. Im zweiten Schritt des Verfahrens muss diese Gleichung gelöst werden. Die dafür benötigten Methoden gehen über eine einfache Integration hinaus und bilden den Gegenstand der Teile IV und V dieses Buches.

3.1 Rekursionen

Bei Abzählproblemen der Kombinatorik ist im Allgemeinen eine Funktion g einer ganzzahligen Variablen n gesucht, etwa die Anzahl von Permutationen von n Objekten oder die Zahl verschiedener Teilmengen einer Menge aus n Elementen. Statt die gesuchte Funktion direkt zu berechnen, ist es oft günstiger, zunächst ihre *Änderung* bei der Erhöhung des Arguments von n auf $n + 1$ zu bestimmen.

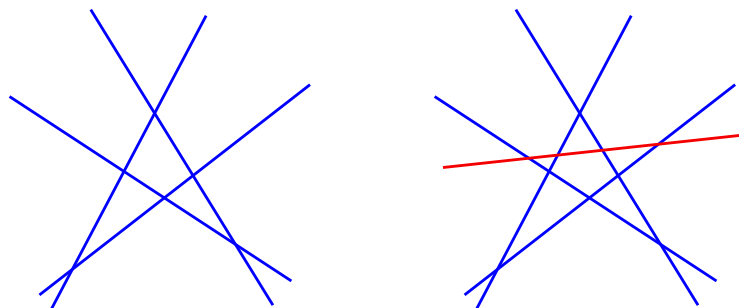


Abb. 3.1 Links: Eine Anzahl n von Geraden in genereller Lage zerteilt die Ebene in G verschiedene Gebiete. Rechts: Zur Bestimmung der Funktion $G(n)$ ist es günstig zu überlegen, wie sich die Zahl der Gebiete bei Hinzunahme einer weiteren Geraden (rot) erhöht