10 Differenzialrechnung

Definition der Ableitung

Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, die auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ gegeben ist, heißt **an einer Stelle $\mathbf{x}_0 \in I$ differenzierbar**, wenn der Grenzwert

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Diesen Grenzwert nennt man die **Ableitung von f in** x_0 und er wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet.

Es gibt mehrere verschiedene Möglichkeiten, den Begriff der Ableitung zu interpretieren.

- Die Ableitung beschreibt die lineare Approximation.
- Die Ableitung gibt die Steigung der Tangente an.
- Die Ableitung liefert die lokale Änderungsrate.

Differenzierbare Funktionen einer Veränderlichen sind auch immer **stetige** Funktionen.

Die Ableitung als Funktion

Ist eine Funktion auf einem ganzen Intervall differenzierbar, so erhält man durch das Differenzieren eine neue Funktion, die **Ableitung.** Können diese Ableitung und ihre Ableitungen wieder differenziert werden, so spricht man von einer r-mal differenzierbaren Funktion. Ist die r-te Ableitung eine stetige Funktion, so heißt die ursprüngliche Funktion ***r*-mal stetig differenzierbar.**

Ableiten ist eine lineare Operation

Sind $f, g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen und $a \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante, so sind auch die Funktionen $f + g$ und af differenzierbar und es gilt

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

und

$$(af)'(x) = af'(x)\,.$$

Für die Berechnung von Ableitungen von zusammengesetzten Ausdrücken gibt es verschiedene Regeln.

Produktregel

Das Produkt zweier differenzierbarer Funktionen $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar und es gilt für die Ableitung

$$(fg)'(x) = f(x)\, g'(x) + f'(x)\, g(x)\,.$$

Kettenregel

Wenn zwei differenzierbare Funktionen $f\colon D \to \mathbb{R}$ und $g\colon f(D) \to \mathbb{R}$ gegeben sind, so ist die Verkettung der Funktionen differenzierbar und es gilt für $x \in D$

$$(g \circ f)'(x) \;=\; g'\big(f(x)\big)\, f'(x)\,.$$

Umkehrfunktionen streng monotoner, differenzierbarer Funktionen sind differenzierbar

Auch die Umkehrfunktion einer differenzierbaren Funktion kann selbst differenziert werden.

Eine besondere Klasse von differenzierbaren Funktionen sind Funktionen, die sich in eine **Potenzreihe** entwickeln lassen. Solche Funktionen sind **beliebig oft stetig differenzierbar.**

Die Ableitung ist null an Extremalstellen

Wenn eine Funktion $f\colon [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $\hat{x} \in (a, b)$ ein lokales Maximum oder Minimum hat und in $\hat{x}$ differenzierbar ist, gilt

$$f'(\hat{x}) = 0\,.$$

Für die Analysis spielt der folgende Satz eine herausragende Rolle.

Der Mittelwertsatz

Ist $f\colon [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf (a, b) differenzierbar ist, dann gibt es eine Zwischenstelle $z \in (a, b)$ mit

$$f(b) - f(a) = f'(z)\,(b - a)\,.$$

Besitzen zwei Funktionen die gleichen Ableitungen, so unterscheiden sie sich höchstens um eine Konstante. Es gibt auch einen Zusammenhang zwischen Ableitungen und der Monotonie: Monoton wachsende Funktionen haben nicht-negative, monoton fallende Funktionen haben nicht-positive Ableitungen. Indem man das Vorzeichenverhalten der Ableitung in der Umgebung einer Stelle $\hat{x}$ mit $f'(\hat{x}) = 0$ untersucht, kann man entscheiden, ob ein Minimum oder ein Maximum vorliegt.

Eine positive zweite Ableitung bedeutet lokal ein konvexes Verhalten einer Funktion

Diese lokale Untersuchung kann man anhand der zweiten Ableitung durchführen. Ist $f''(\hat{x}) > 0$, so liegt eine lokale Minimalstelle vor, bei $f''(\hat{x}) < 0$ eine lokale Maximalstelle.

Taylorreihen

Definition der Taylorpolynome

Wenn eine Funktion $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n-mal stetig differenzierbar ist auf einem offenen Intervall $D \subseteq \mathbb{R}$, dann heißt

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \quad x \in \mathbb{R},$$

das **Taylorpolynom** vom Grad n zu f um den Entwicklungspunkt x_0.

Die Differenz zwischen Funktion und Taylorpolynom wird das **Restglied** genannt. Die Darstellung einer n-mal stetig differenzierbaren Funktion $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = p_n(x) + R(x, x_0)$$

mit dem Taylorpolynom p_n und dem Restglied $R(x, x_0)$ um einen Entwicklungspunkt $x_0 \in (a, b)$ heißt **Taylorformel**.

Vom Taylorpolynom zur Taylorreihe

Die Reihe

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \right)$$

zu einer unendlich oft differenzierbaren Funktion $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ heißt **Taylorreihe.** Nicht jede Taylorreihe konvergiert gegen die sie generierende Funktion. Entscheidend dafür ist, dass das Restglied gegen null geht.

Die L'Hospital'sche Regel

Ist $I = (a, b)$ ein beschränktes Intervall, $x_0 \in I$ und $f, g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ und $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ für alle $x \neq x_0$. Dann gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls der Grenzwert auf der rechten Seite existiert. Dieselbe Aussage gilt, wenn $I = (a, \infty)$ und der Grenzwert $x \to \infty$ oder $I = (-\infty, b)$ und der Grenzwert $x \to -\infty$ betrachtet wird.

Spline-Interpolation

Sind $n \in \mathbb{N}$ Datenpunkte $(x_j, y_j) \in [a, b] \times \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \ldots, n$ gegeben, so bedeutet **Interpolation**, dass eine Funktion $u \in V$ bestimmt wird mit der Eigenschaft

$$u(x_j) = y_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Dabei bezeichnet V eine Menge von Funktionen, die durch endlich viele Parameter gegeben ist.

Da die Interpolation mit Polynomen zu Oszillationen und damit zur Instabilität führt, verwendet man andere Typen von Funktionen.

Definition von Splines

Ist zu einem Intervall $[a, b]$ eine Zerlegung der Form

$$a = x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

gegeben, so heißt eine Funktion $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ **Spline** vom Grad $m \in \mathbb{N}_0$ mit Defekt $r \in \mathbb{N}_0$ bezüglich der Zerlegung, wenn die Funktion $(m - r)$-mal stetig differenzierbar ist und die Einschränkung von s auf ein Teilintervall $[x_j, x_{j+1}]$, $j = 1, \ldots, n - 1$, ein Polynom vom Grad m ist.

Häufig werden **kubische Splines** verwendet. Mit Splines lässt sich die Interpolationsaufgabe stabil lösen.

Übersicht: Differenziationsregeln und Ableitungsfunktionen

Die wichtigsten Ableitungen und Regeln für differenzierbare Funktionen $f, g : D \to \mathbb{R}$ lassen sich knapp zusammenfassen.

Linearität

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$
$$(af)'(x) = af'(x)$$

Produktregel

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Quotientenregel

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}, \quad \text{für } g(x) \neq 0$$

Kettenregel

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x)$$

Potenzreihen
Mit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \,(x - x_0)^k$$

folgt

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k \,(x - x_0)^{k-1}$$

für $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ und Konvergenzradius $r \geq 0$.

Ableitungen von Standardfunktionen, wobei $a \in \mathbb{R}$ eine Konstante bezeichnet:

$f(x)$	$f'(x)$
a	0
x^a	$a\, x^{a-1}$
$\exp x$	$\exp x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
a^x	$a^x \ln a\,, \quad a > 0$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$\cot x$	$\frac{-1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1 + x^2}$
$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1 + x^2}$

Übersicht: Verhalten differenzierbarer Funktionen

Das lokale Verhalten differenzierbarer Funktionen lässt sich an den Werten der Ableitungen ablesen.

Bezeichnet $f : D \to \mathbb{R}$ eine **hinreichend oft stetig differenzierbare Funktion** und $(a, b) \subseteq D$ ein offenes Teilintervall des Definitionsbereichs, dann gelten folgende Aussagen zum lokalen Verhalten von f auf (a, b) und den Ableitungen auf (a, b):

Extrema

$$\begin{aligned} f'(\hat{x}) &= 0 \Leftrightarrow \hat{x} \in (a, b) \text{ kritischer Punkt} \\ f'(\hat{x}) &= 0 \text{ und } f''(\hat{x}) > 0 \quad \Longrightarrow \quad \hat{x} \in (a, b) \text{ Minimalstelle} \\ f'(\hat{x}) &= 0 \text{ und } f''(\hat{x}) < 0 \quad \Longrightarrow \quad \hat{x} \in (a, b) \text{ Maximalstelle} \end{aligned}$$

Monotonie

$f' \leq 0$ auf $(a, b) \iff f$ monoton fallend auf (a, b)

$f' \geq 0$ auf $(a, b) \iff f$ monoton steigend auf (a, b)

$f' < 0$ auf $(a, b) \Longrightarrow f$ streng monoton fallend auf (a, b)

$f' > 0$ auf $(a, b) \Longrightarrow f$ streng monoton steigend auf (a, b)

Krümmung

$f'' \geq 0$ auf $(a, b) \iff f$ konvex auf (a, b)

$f'' \leq 0$ auf $(a, b) \iff f$ konkav auf (a, b)

$f'' > 0$ auf $(a, b) \Longrightarrow f$ strikt konvex auf (a, b)

$f'' < 0$ auf $(a, b) \Longrightarrow f$ strikt konkav auf (a, b)

Übersicht: Potenzreihen/Taylorreihen

Zusammenstellung einiger Potenzreihenentwicklungen und die zugehörigen Konvergenzbereiche.

Die allgemeine binomische Reihe

$$(1 + x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n , \qquad \text{für } |x| < 1$$

mit dem verallgemeinerten Binomialkoeffizienten

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha \cdot \ldots \cdot (\alpha - n + 1)}{n!} .$$

Die Exponentialfunktion

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n, \quad \text{für } x \in \mathbb{C}$$

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}, \quad \text{für } x \in \mathbb{C}$$

$$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \text{für } x \in \mathbb{C}$$

$$\tanh(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n} (2^{2n}-1) B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1}, \quad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} x^n, \quad |x| < 1$$

$$\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}, \quad |x| < 1$$

Trigonometrische Funktionen

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad \text{für } x \in \mathbb{C}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad \text{für } x \in \mathbb{C}$$

$$\tan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} (2^{2n}-1) B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1}, \quad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{(2n+1)\, 2^n\, n!} x^{2n+1}, \quad |x| < 1$$

$$\arcsin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{(2n+1)\, 2^n\, n!} x^{2n+1}, \quad |x| < 1$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} x^{2n+1}, \quad |x| < 1$$

$$\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} x^{2n+1}, \quad |x| < 1$$

Mit B_{2k} sind die sogenannten *Bernoulli-Zahlen* bezeichnet, die sich rekursiv aus

$$B_0 = 1 \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k = 0$$

für $n \in \mathbb{N}$ berechnen lassen.

http://www.springer.com/978-3-8274-2494-5

Mathematik zum Mitnehmen
Zusammenfassungen und Übersichten aus Arens et al., Mathematik
Arens, T.; Hettlich, F.; Karpfinger, C.; Kockelkorn, U.; Lichtenegger, K.; Stachel, H.
2010, VIII, 232 S. 34 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-8274-2494-5