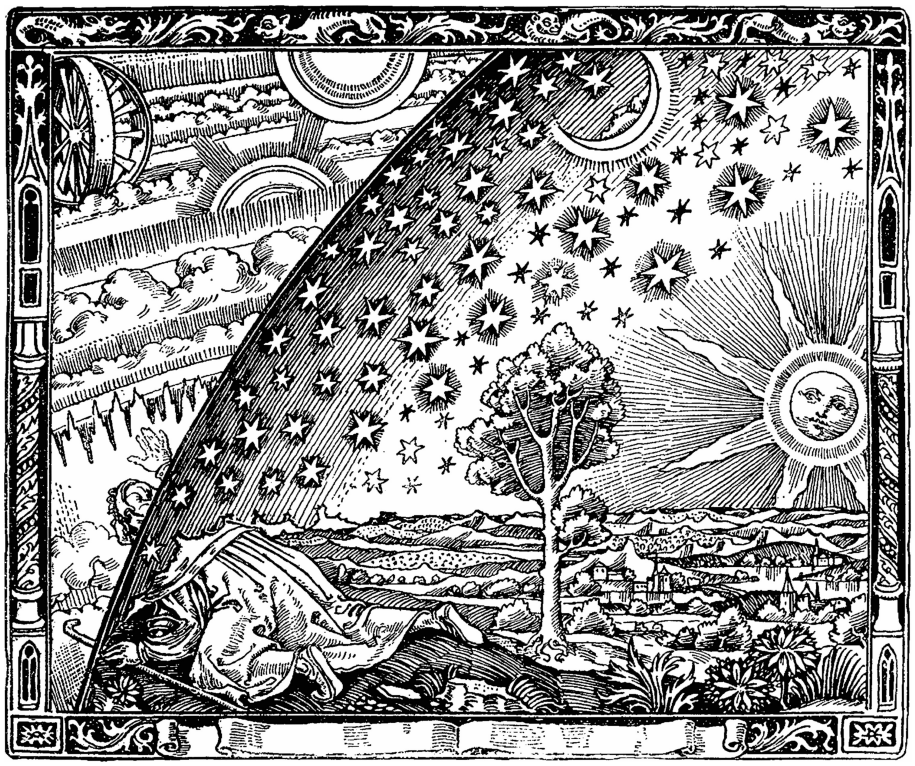
Kapitel 1

Homogene, isotrope Weltmodelle



Quelle: Wikimedia Commons, aus L'Atmosphère: Météorologie Populaire *(Paris, 1888)*

Wie lässt sich das Universum als Ganzes physikalisch beschreiben?
Welche Annahmen gehen in diese Beschreibung ein?
Welche Parameter kennzeichnen das Universum und seine Entwicklung?
Wie können Entfernungen im Universum festgelegt werden?

Die Kosmologie unternimmt den Versuch, den Aufbau und die Entwicklung des gesamten Universums durch ein physikalisches Modell zu beschreiben. Das erscheint gewagt: Im Unterschied zu allen anderen Gegenständen der Physik gibt es unser Universum nur ein einziges Mal. Selbst dann, wenn es mehrere Universen gäbe, könnten wir mangels Daten nichts über andere Universen als unseres aussagen. Wie in der Astronomie und Astrophysik üblich sind natürlich auch keine Experimente an unserem Universum möglich, sondern nur Beobachtungen. Wie kann man trotzdem versuchen, eine physikalisch fundierte Vorstellung vom gesamten Universum zu entwickeln?

Man behilft sich mit Annahmen. Die erste ist, dass moderne Weltmodelle im Rahmen der *allgemeinen Relativitätstheorie* konstruiert werden müssen. Dies ist gut begründet. Von den vier Wechselwirkungen, die die Physik kennt (der starken, der schwachen, der elektromagnetischen und der gravitativen), ist allein die Gravitation für die Entwicklung des Universums entscheidend. Die schwache und die starke Wechselwirkung sind durch ihre endlichen Reichweiten auf subatomare Skalen beschränkt. Die elektromagnetische Wechselwirkung hat zwar eine unendliche Reichweite, aber ungleichnamige Ladungen schirmen einander ab. Dadurch begrenzen sie diese Reichweite effektiv auf Längenskalen, die klein gegenüber den Skalen sind, die das Universum charakterisieren. Für die Kosmologie kann somit einzig die Schwerkraft maßgeblich sein.

Innerhalb der allgemeinen Relativitätstheorie kommen zwei *Symmetrieannahmen* hinzu, die auf den russischen Mathematiker Alexander A. Friedmann (1888–1925) zurückgehen. Die erste Annahme ist, dass uns unser Universum bei geeigneter Mittelung als *isotrop* erscheint. Das bedeutet, dass beliebige Messungen mittlerer Eigenschaften unseres Universums, z. B. seiner mittleren Massendichte, in jeder Richtung denselben Wert ergeben. Die zweite Annahme ist, dass jedem anderen Beobachter im Kosmos das Universum als ebenso isotrop erscheint.

Es gehört vielleicht zu den erstaunlichsten Entwicklungen der Physik und Astrophysik im späten 20. und frühen 21. Jahrhundert, dass auf der Grundlage dieser drei einfachen Annahmen ein *kosmologisches Standardmodell* entwickelt werden konnte, dessen globale Eigenschaften durch sechs Parameter gut beschrieben werden können und in dessen Rahmen sich so gut wie alle heute bekannten Beobachtungen einfügen lassen. Dieses kosmologische Standardmodell soll zusammen mit der empirischen Evidenz, die es unterstützt, in diesem Buch beschrieben werden. Zu Beginn des Kapitels wird das Modell konstruiert und seine globalen Eigenschaften werden untersucht. Danach werden die Geometrie und die Dynamik des Universums sowie die physikalischen Parameter beschrieben, die es charakterisieren und seine zeitlichen und räumlichen Abmessungen abgesteckt.

Viele, teils sehr aktuelle Bücher besprechen das kosmologische Standardmodell. Eine Zusammenfassung seiner Eigenschaften sowie seiner empirischen Grundlagen bietet der Übersichtsartikel [3].

1.1 Symmetrieannahmen und Metrik

1.1.1 Kurze historische Einleitung

Wie vielleicht keine andere moderne Theorie der Physik ist die allgemeine Relativitätstheorie das Werk eines einzelnen Menschen. Am 25. November 1915 veröffentlichte Albert Einstein (1879–1955) die endgültige Fassung der Theorie mit den heute nach ihm benannten Feldgleichungen der Gravitation [4]. Sie legen fest, wie der Materie- und Energieinhalt der Raumzeit die Geometrie bestimmt und wie umgekehrt die Geometrie auf die Bewegung von Materie und Energie zurückwirkt.

Es ist aus heutiger Sicht fast unglaublich, dass noch bis tief in die 1920er-Jahre hinein unklar war, ob das Universum größer sein könnte als die Milchstraße, unsere nähere kosmische Heimat. Erst 1925 gelang es Edwin P. Hubble (1889–1953) zu belegen, dass der Andromeda-Nebel, die nächstgelegene Galaxie von ähnlichen Ausmaßen wie die Milchstraße, weit außerhalb der Milchstraße liegt [5]. Dabei war es spätestens seit 1917 durch die Arbeiten von Vesto Slipher (1875–1969) und Carl Wirtz (1876–1939) bekannt [6, 7], dass sich die als „Nebel“ bezeichneten Galaxien insofern eigenartig verhalten, als sich bei Weitem die Mehrheit von ihnen von uns entfernt. Würden sich diese Nebel zufällig bewegen, sollte sich je etwa die Hälfte auf uns zu und von uns weg bewegen, aber dies ist nicht der Fall: Die Nebel bewegen sich mehrheitlich von uns weg.

In den späten 1920er- und frühen 1930er-Jahren gelang es Edwin P. Hubble und Milton Humason (1891–1972), sowohl die Geschwindigkeiten als auch die Entfernungen weit entfernter Galaxien zu ermitteln [8]. Das Ergebnis war, was heute als *Hubble-Lemaître-Gesetz* bekannt ist: Die Galaxien bewegen sich nicht nur mehrheitlich von uns weg, sondern auch umso schneller, je weiter sie von uns entfernt sind. Im Jahre 1931, sechs Jahre nach der Feststellung, dass das Universum größer als die Milchstraße ist, war es möglich, Galaxien in Entfernungen bis zu 100 Millionen Lichtjahren zu uns zu entdecken und zu vermessen. Obwohl Hubble und Humason damit eine wesentliche Eigenschaft des Universums bestimmten, lehnten sie in ihrer Arbeit von 1931 jede kosmologische Deutung ausdrücklich ab:

The present contribution concerns a correlation of empirical data of observation. The writers are constrained to describe the „apparent velocity displacements“ without venturing on the interpretation and its cosmologic significance. [8]

Bereits 1922 hatte Alexander Friedmann (s. Abb. 1.4) auf der Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie jene Klasse kosmologischer Modelle entworfen, die heute seinen Namen trägt und aus der das heutige kosmologische Standardmodell stammt [9]. Als Mathematiker lehnte Friedmann jedoch eine physikalische Deutung seiner Modelle ab und berief sich allein auf die mathematische Einfachheit, die ihn zu diesen Lösungen geführt hatte:

Für diese zweite Annahme [der Isotropie der Metrik] können, wie mir scheint, keine physikalischen oder philosophischen Gründe angegeben werden; sie dient ausschließlich zur Vereinfachung der Rechnungen. [9]

Es war der belgische Priester und Physiker Georges Lemaître (1894–1966), der 1927 Friedmanns Modelle unabhängig noch einmal ableitete, sie aber mit der Beobachtung der Galaxienflucht verband [10]: Lemaître (s. Abb. 1.5) darf als der Vater der modernen Kosmologie gelten, weil er die Eigenschaft der Friedmann-Modelle, entweder kontrahieren oder expandieren zu müssen, mit der Bewegung der Galaxien zum *Urknallmodell* zusammenfügte, demzufolge das Universum aus einem extrem heißen, dichten Anfangszustand entsprungen ist:

Wir haben eine Lösung [der Einstein'schen Feldgleichungen] erhalten, welche die folgenden Bedingungen erfüllt: 1. Die Masse des Universums ist konstant [...] 2. Der Radius des Universums wächst ständig [...] 3. Die Entfernung der extragalaktischen Nebel ist ein kosmischer Effekt aufgrund der Ausdehnung

des Raumes [. . .] Diese Lösung verbindet die Vorteile derjenigen von de Sitter und Einstein. Wir bemerken, dass der größte Teil des Universums für immer außerhalb unserer Reichweite liegt.[1] [10]

Dieses von Fred Hoyle (1915–2001) „Big-Bang“-Universum genannte Modell war nicht unumstritten. Hubble und Humason hatten einen viel zu großen Wert für die heute sogenannte Hubble-Konstante gemessen, demzufolge das Universum etwa halb so alt hätte sein müssen wie das damals schon bekannte Alter der Erde. Erst 1944 konnte Walter Baade (1893–1960) begründen, dass und warum die Hubble-Konstante erheblich verringert werden musste [11].

Ausgehend von der Überlegung, dass ein räumlich homogenes Universum zeitlich ebenso homogen und daher unveränderlich sein sollte, entwickelten Hermann Bondi (1919–2005), Thomas Gold (1920–2004) und Fred Hoyle 1948 das *Steady-State-Modell* des Universums [12, 13]. Ihmzufolge würde gerade in solchem Maß Materie entstehen, dass die Materiedichte trotz der Ausdehnung des Universums konstant bleiben könnte. Dieses konzeptionell und theoretisch elegant begründete Modell wurde in den 1960er-Jahren unreparierbar erschüttert. Zunächst belegten Martin Ryle (1918–1984) und R. W. Clarke, dass sich die Galaxienpopulation im Universum entwickelt [14], dann entdeckten 1965 Arno A. Penzias (1933–) und Robert W. Wilson (1936–) den *kosmischen Mikrowellenhintergrund* (*cosmic microwave background,* CMB) [15], den Robert H. Dicke (1916–1997), Peter G. Roll, P. James E. Peebles (1935–) und David T. Wilkinson (1935–2002) sofort als Wärmestrahlung interpretierten [16], die Zeugnis von einem heißen Ursprung des Universums ablegte.

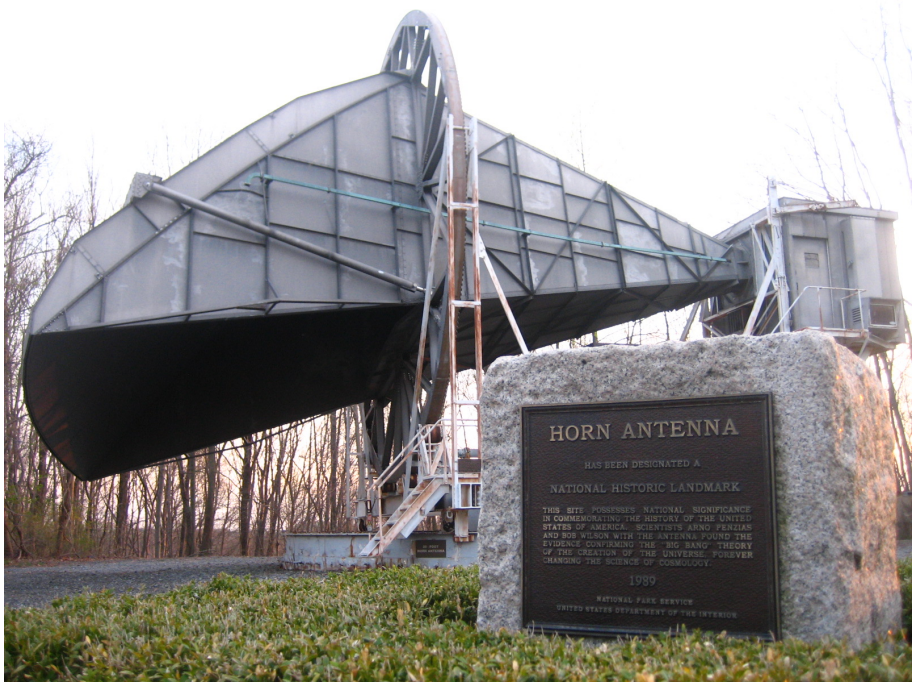


Abb. 1.1 Mit dieser Hornantenne in Holmdel/New Jersey entdeckten Arno A. Penzias und Robert W. Wilson 1965 den kosmischen Mikrowellenhintergrund. [15]. Quelle: Wikimedia Commons

Nicht nur die Existenz, sondern auch die Temperatur dieser Wärmestrahlung

[1] Übersetzung des Autors aus dem Französischen

hatten 1949 schon Ralph A. Alpher (1921–2007) und Robert C. Herman (1914–1997) aufgrund anderer Argumente vorhergesagt [17]. Ausgehend von Überlegungen durch George A. Gamow (1904–1968) hatten beide die Fusion leichter Elemente in einer hypothetischen heißen Entwicklungsphase des frühen Universums untersucht. Dabei waren sie zu dem Schluss gekommen, dass die beobachtete Heliumhäufigkeit in der Sonne, falls sie kosmischen Ursprungs sein sollte, auf eine Temperatur schließen ließe, die heute zwischen einem und fünf Kelvin liegen solle. Messungen zwischen 1989 und 1993 mit dem amerikanischen Cobe-Satelliten ergaben nach einer Reihe von zunehmend verfeinerten Analysen eine Temperatur von $(2,725 \pm 0.001)$ K [1]. Damit waren der heiße Anfang des Universums und mit ihm die Grundlage des kosmologischen Standardmodells etabliert.

Wir stellen nun die globalen, geometrischen und dynamischen Eigenschaften des Universums vor, wie sie aus dem kosmologischen Standardmodell folgen. In weiteren Kapiteln werden wird dann die thermische Entwicklung des Universums sowie die Entstehung, die Entwicklung und die Eigenschaften der Strukturen behandeln, die wir heute im Universum finden.

1.1.2 Annahmen

Das moderne kosmologische Standardmodell beruht im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie auf zwei fundamentalen Annahmen:

1. Wenn sie über genügend große Skalen gemittelt werden, sind die beobachtbaren Eigenschaften des Universums *isotrop,* d. h., sie hängen nicht von der Beobachtungsrichtung ab.

   Dabei muss noch geklärt werden, was *genügend große* Skalen wären. Galaxien in unserer kosmischen Nachbarschaft sind höchst anisotrop verteilt, während sich die Verteilung ferner Galaxien der Isotropie annähert. Der kosmische Mikrowellenhintergrund ist nahezu perfekt isotrop (vgl. Kapitel 6).

2. *Kosmologisches Prinzip:* Unsere Position im Universum ist durch nichts gegenüber irgendeiner anderen Position im Universum ausgezeichnet.

   Diese Annahme spiegelt die *Kopernikanische Revolution* des Weltmodells wider, die mit der Einsicht begann, dass die Erde nicht im Zentrum des Universums steht.

Aufgrund der zweiten Annahme des kosmologischen Prinzips muss die erste Annahme für jeden Beobachter im Universum gelten. Wenn das Universum tatsächlich isotrop um jeden seiner Punkte ist, ist es auch *homogen.* Deswegen werden diese beiden Annahmen oft so formuliert: *Das Universum ist homogen und isotrop.* (Siehe dazu auch den Vertiefungskasten „Homogenität und Isotropie“ in diesem Abschnitt.)

Dies sind kühne Annahmen, die begründet werden müssen. Ein ideal homogenes und isotropes Universum schlösse unsere Existenz aus, weil sich in ihm keinerlei Strukturen entwickeln könnten. Wir werden sorgfältig untersuchen müssen, wie in einem derart idealisierten Weltmodell Strukturen unterzubringen sind.

Vertiefung: Homogenität und Isotropie

Symmetrien der Raumzeit

Die genaue Definition homogener und isotroper Raumzeiten in der allgemeinen Relativitätstheorie beginnt damit, dass in einer vierdimensionalen Raumzeit zunächst festgestellt werden muss, welche Unterräume überhaupt als räumlich angesehen werden sollen. Erst dann ist es sinnvoll, von räumlichen Symmetrien zu sprechen.

Räumlich homogen heißt eine Raumzeit, wenn in ihr eine einparametrige Familie raumartiger Hyperflächen Σ_t existiert, welche die Raumzeit derart blättert, dass zu jedem t und für jedes Paar von Punkten $p, q \in \Sigma_t$ eine Isometrie der Metrik existiert, die p in q abbildet. Auf den so definierten raumartigen Blättern der Raumzeit lässt also jede Translation die Metrik unverändert. Der Parameter t kann als Zeitkoordinate verwendet werden.

Bevor wir festlegen können, was Isotropie genau bedeuten soll, müssen wir feststellen, dass die Definition der Isotropie einen bestimmten Bewegungszustand des Beobachters voraussetzt. Zwei Beobachter, die denselben Punkt der Raumzeit mit verschiedenen Geschwindigkeiten durchqueren, werden im Allgemeinen unterschiedliche Ergebnisse erhalten.

Dementsprechend definieren wir eine Raumzeit als *räumlich isotrop* um einen Punkt p, wenn es ein Bündel zeitartiger geodätischer Linien durch p mit Tangentenvektoren u so gibt, dass irgend zwei Vektoren v_1 und v_2, die im Punkt p senkrecht auf u stehen, durch eine Isometrie der Metrik aufeinander abgebildet werden können, während p und t unverändert bleiben. Wenn die Raumzeit also räumlich isotrop ist, kann senkrecht zu u keine räumliche Richtung ausgezeichnet werden.

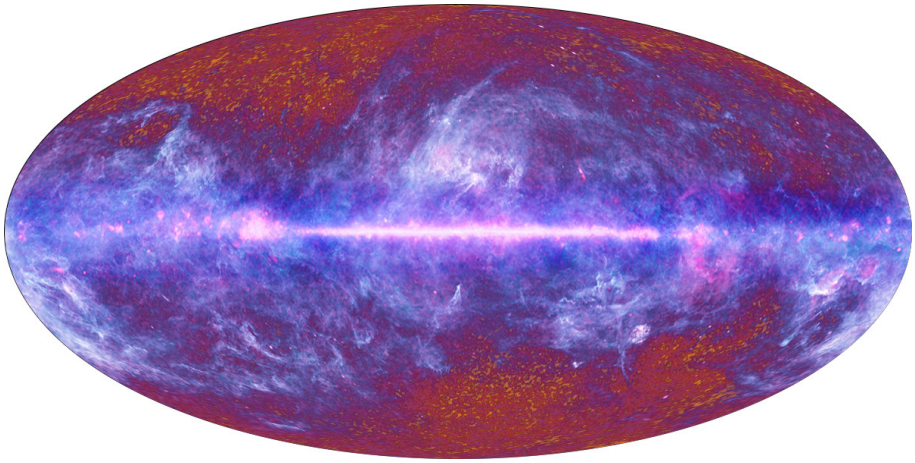


Abb. 1.2 Eines der stärksten Argumente dafür, dass unser Universum tatsächlich in bester Näherung isotrop erscheint, liefern die winzigen Temperaturschwankungen im kosmischen Mikrowellenhintergrund. Dabei handelt es sich um Wärmestrahlung, die freigesetzt wurde, als das Universum etwa 400 000 Jahre alt war. Das Bild zeigt den Mikrowellenhimmel, wie er von dem europäischen Satelliten Planck beobachtet wurde. Das starke Signal um den Äquator dieser Himmelskarte stammt von der Milchstraße selbst. Oberhalb und unterhalb der galaktischen Scheibe schimmern Temperaturschwankungen durch, deren relative Amplitude bei etwa 10^{-5} liegt. Der Mikrowellenhintergrund liefert damit ein erstaunlich isotropes Signal aus der Frühzeit des Universums. Quelle: ESA

Kommen wir hier noch einmal darauf, dass die Gravitation die einzige fundamentale Wechselwirkung sein kann, die für die Kosmologie maßgeblich ist. Gravitation wird in der modernen Physik durch die allgemeine Relativitätstheorie beschrieben. Die Newton'sche Gravitation war für isolierte Körper entwickelt worden und hat grundlegende und konzeptionelle Schwierigkeiten damit, einen unbegrenzten Raum zu beschreiben, der homogen von Materie angefüllt ist.

Die allgemeine Relativitätstheorie beschreibt die Raumzeit als eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit, deren Metrik g sich als ein dynamisches Feld auffassen lässt. Ihre Dynamik wird durch die Einstein'schen Feldgleichungen beschrieben, die die Metrik bzw. die durch sie beschriebene Krümmung der Raumzeit an deren Materie-Energie-Inhalt koppeln (vgl. dazu den Vertiefungskasten „Krümmung" in diesem Abschnitt).

Da die Struktur der Raumzeit festlegt, wie sich Materie und Energie bewegen, umgekehrt aber Materie und Energie die geometrische Struktur der Raumzeit bestimmen, sind die Einstein'schen Feldgleichungen notwendigerweise nichtlinear (im Gegensatz z. B. zu den Feldgleichungen der Elektrodynamik, den Maxwell'schen Gleichungen). Deswegen sind Lösungen der Einstein'schen Feldgleichungen im Allgemeinen sehr schwierig zu konstruieren.

1.1.3 Metrik

Mathematisch gesprochen ist eine Metrik eine bilineare, nicht ausgeartete, symmetrische Abbildung zweier Vektoren in die reellen Zahlen. Damit ist sie

Vertiefung: Krümmung

Transport von Vektoren entlang geschlossener Kurven

Die intrinsische Krümmung einer Mannigfaltigkeit wird durch folgende anschauliche Operation beschrieben: An einem beliebigen Punkt p der Mannigfaltigkeit werden zwei nicht kollineare Vektoren u und v festgelegt. Eine Kopie von v wird an das Ende von u, eine Kopie von u an das Ende von v verschoben. Nun werden zwei Kopien eines beliebigen Vektors x von p aus längs der beiden möglichen Wege $\overline{uv}$ und $\overline{vu}$ verschoben. Die Krümmung $\bar{R}(u,v)x$ gibt an, um wie viel sich die beiden transportierten Kopien von x an den Endpunkten der beiden Wege unterscheiden. Die Krümmung bildet demnach die drei Vektoren u, v und x auf einen vierten Vektor ab und ist daher kein Tensor. Der Riemann'sche Krümmungstensor entsteht, indem man den Vektor $\bar{R}(u,v)x$ mit einem weiteren Vektor skalar multipliziert.

auch ein symmetrischer Tensor zweiter Stufe, der für eine vierdimensionale Raumzeit durch eine 4×4-Matrix $(g_{\mu\nu})$ dargestellt werden kann. Aufgrund ihrer Symmetrie hat diese Matrix zehn unabhängige Komponenten, die Zeit-Zeit-Komponente g_{00}, die drei raum-zeitlichen Komponenten g_{0i} und die sechs rein räumlichen Komponenten g_{ij}. Griechische Indizes laufen über räumliche und zeitliche Komponenten, d. h. sie nehmen die Werte $0 \leq \mu \leq 3$ an, während lateinische Indizes nur räumliche Komponenten bezeichnen, $1 \leq i \leq 3$.

Die beiden fundamentalen Symmetrieannahmen vereinfachen die Metrik erheblich. In einer präziseren Ausdrucksweise lauten sie:

1. Wenn über genügend große Skalen gemittelt wird, gibt es eine mittlere Bewegung von Materie und Energie im Universum, bezüglich derer alle beobachtbaren Eigenschaften des Universums isotrop sind.
2. Alle fundamentalen Beobachter, d. h. gedachten Beobachter, die dieser mittleren Bewegung folgen, erfahren dieselbe Entwicklungsgeschichte des Universums, d. h. sie beobachten dieselben Eigenschaften des Universums, wenn nur ihre Uhren geeignet synchronisiert sind.

Annahmen

Das kosmologische Standardmodell baut auf drei Annahmen auf, nämlich auf der Gültigkeit der allgemeinen Relativitätstheorie und darauf, dass das Universum im Mittel isotrop und homogen ist.

Betrachten wir nun das *Linienelement* $\mathrm{d}s$ der Metrik,

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu \,. \tag{1.1}$$

Räumliche Koordinaten, die an die fundamentalen Beobachter angeheftet werden, heißen *mitbewegte Koordinaten.* Sie bleiben daher für mitbewegte Beobachter gleich, auch wenn sich Längenskalen im Universum aufgrund der allgemeinen Expansion vergrößern. In solchen Koordinaten sind fundamentale Beobachter offenbar durch $\mathrm{d}x^i = 0$ gekennzeichnet. Wenn wir voraussetzen, dass deren Eigenzeit mit der Koordinatenzeit übereinstimmen soll, muss gelten

$$\mathrm{d}s^2 = g_{00}\,\mathrm{d}t^2 = -c^2\,\mathrm{d}t^2 \quad \Rightarrow \quad g_{00} = -c^2 \,. \tag{1.2}$$

Die Isotropie verlangt, dass Uhren so synchronisiert werden können, dass $g_{0i} = 0$ gilt. Wenn das nicht möglich wäre, würden die Komponenten von g_{0i} eine räumliche Vorzugsrichtung definieren, die der Isotropie widerspräche. Also können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$g_{0i} = 0 \tag{1.3}$$

voraussetzen.

Achtung Das Linienelement $\mathrm{d}s$ der Metrik gibt den Abstand zweier Punkte voneinander an, die durch die Koordinatendifferenzen $\mathrm{d}x^\mu$ voneinander getrennt sind. ◀

Das Linienelement wird dadurch auf

$$\mathrm{d}s^2 = -c^2\mathrm{d}t^2 + g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j \tag{1.4}$$

reduziert. Dementsprechend kann die Raumzeit in räumliche Hyperflächen zu konstanter kosmischer Zeit t zerlegt werden, d. h. sie lässt eine *Blätterung* zu. Die Krümmung der Raumzeit induziert auf diesen Hyperflächen eine räumliche Krümmung K, die wegen der Homogenität räumlich konstant sein muss. Ohne die Isotropie und die Homogenität zu verletzen, können die räumlichen Hyperflächen dann nur noch durch eine *Skalenfunktion* $a(t)$ skaliert werden, die ausschließlich von der Zeit abhängen darf,

$$\mathrm{d}s^2 = -c^2\,\mathrm{d}t^2 + a^2(t)\,\mathrm{d}l^2\ , \tag{1.5}$$

wobei $\mathrm{d}l$ das Linienelement der homogenen und isotropen räumlichen Hyperflächen ist. Wenn die Skalenfunktion $a(t)$ von den räumlichen Koordinaten abhinge, könnte die Expansion die räumliche Homogenität nicht erhalten. Ein Spezialfall von (1.5) ist der Minkowski-Raum, in dem $\mathrm{d}l$ das euklidische Linienelement und $a(t)$ konstant sind.

Achtung Beachten Sie, dass die Größe K in der Metrik aufgrund ihrer Konstruktion allein die Krümmung *räumlicher* Hyperflächen beschreibt. Auch eine Raumzeit, die räumlich flach ist, kann *raumzeitlich* gekrümmt sein. ◀

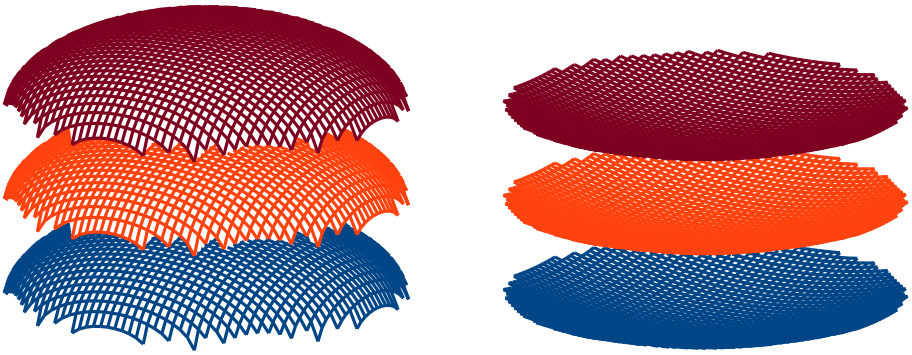


Abb. 1.3 Die Raumzeit des Universums lässt sich in „Blätter“ konstanter räumlicher Krümmung zerlegen, die entweder positiv (links) oder negativ (rechts) gekrümmt sind.

Rein geometrische Überlegungen zeigen, dass dreidimensionale Räume konstanter Krümmung K ein Linienelement $\mathrm{d}l$ der Form

$$\mathrm{d}l^2 = \frac{\mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2}{\left(1 + Kr^2/4\right)^2} \tag{1.6}$$

haben müssen, wobei die radiale Koordinate r wie üblich durch $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ bestimmt ist. Nun legt es die Isotropie nahe, sphärische Polarkoordinaten (r, θ, φ)

anstelle der kartesischen Koordinaten (x_1, x_2, x_3) einzuführen. Definiert man ferner noch eine neue radiale Koordinate w durch

$$\mathrm{d}w = \frac{\mathrm{d}r}{1 + Kr^2/4} \,, \tag{1.7}$$

nimmt das Linienelement (1.6) die Form

$$\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}w^2 + f_K^2(w)\left[\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2\right] = \mathrm{d}w^2 + f_K^2(w)\,\mathrm{d}\Omega^2 \tag{1.8}$$

an, wobei $\mathrm{d}\Omega^2$ das gewöhnliche Raumwinkelelement ist. Die *radiale Funktion* $f_K(w)$ tritt deswegen auf, weil der Zusammenhang zwischen der radialen Koordinate w und der Oberfläche von Kugeln mit konstantem w noch festzulegen bleibt.

Die Metrik, die durch das Linienelement (1.8) ausgedrückt wird, ist offenbar räumlich isotrop. Abhängig vom Vorzeichen von K kommen für die radiale Funktion $f_K(w)$ eine trigonometrische, eine lineare und eine hyperbolische Lösung infrage,

$$f_K(w) = \begin{cases} K^{-1/2}\sin\left(K^{1/2}w\right) & (K > 0) \\ w & (K = 0) \\ |K|^{-1/2}\sinh\left(|K|^{1/2}w\right) & (K < 0) \end{cases} \,. \tag{1.9}$$

?

Bestimmen Sie als sportliche Übung die Funktion $f_K(w)$ selbst, ausgehend von (1.7).

Sowohl die Funktion $f_K(w)$ als auch der *Krümmungsparameter* $|K|^{-1/2}$ haben die Dimension einer Länge.

Eine weitere alternative Form des Linienelements $\mathrm{d}s$ gewinnt man, wenn man eine neue radiale Koordinate u durch $u = f_K(w)$ einführt. Dann ist das räumliche Linienelement durch

$$\mathrm{d}l^2 = \frac{\mathrm{d}u^2}{1 - Ku^2} + u^2\mathrm{d}\Omega^2 \tag{1.10}$$

gegeben. Dies wird auch oft verwendet, hat aber den Nachteil, für $K > 0$ bei $r = K^{-1/2}$ singulär zu werden.

?

Was bedeutet es, dass das Raumwinkelelement in der Metrik mit $f_k(w)$ skaliert wird? Wie können Sie sich diesen Sachverhalt veranschaulichen?

Robertson-Walker-Metrik

Wir gelangen schließlich zu der Metrik eines homogenen und isotropen Universums

$$\mathrm{d}s^2 = -c^2\mathrm{d}t^2 + a^2(t)\left[\mathrm{d}w^2 + f_K^2(w)\mathrm{d}\Omega^2\right] \,, \tag{1.11}$$

wobei $f_K(w)$ durch (1.9) gegeben ist. Diese Metrik wird *Robertson-Walker-Metrik* genannt.

Oft wird anstelle der Koordinatenzeit t die sogenannte *konforme Zeit* η verwendet. Sie ergibt sich dadurch, dass man den Skalenfaktor als konformen Faktor vor die Robertson-Walker-Metrik zieht und schreibt

$$\mathrm{d}s^2 = a^2(\eta)\left(-c^2\mathrm{d}\eta^2 + \mathrm{d}w^2 + f_K^2(w)\mathrm{d}\Omega^2\right) \,. \tag{1.12}$$

Offenbar muss die konforme Zeit dann die Gleichung

$$\mathrm{d}\eta = \frac{\mathrm{d}t}{a(t)} \tag{1.13}$$

erfüllen. Darauf kommen wir in Abschn. 4.3 wieder zurück.

www.springer.com/9783662596265

Das kosmologische Standardmodell
Bartelmann, Matthias
1. Aufl. 2019, XII, 276 S. 82 Abb., 75 Abb. in Farbe
ISBN 978-3-662-59626-5