Integrale – unendliche Summen in der Ebene und im Raum

2

In Kap. 1 haben wir gesehen, wie man im $\mathbb{R}^3$ verschiedene Arten von Ableitungen berechnen kann. Bereits aus der Schule ist bekannt, dass die Umkehrung des Ableitens das Integrieren („Aufleiten") ist. Dementsprechend schauen wir uns in diesem Kapitel Integrale für Funktionen mehrerer Variablen an.

Wir fangen hier mit dem Wegintegral an, das eventuell bereits aus der Mechanik bekannt ist – in dem Fall betrachtet diesen Abschnitt als Wiederholung. In aufsteigender Schwierigkeit besprechen wir dann Flächenintegrale in der Ebene, Volumenintegrale und schließlich Flächenintegrale im Raum. Letztlich führt man all diese Integrale auf (Produkte von) eindimensionale(n) Integrale(n) zurück. Alle Definitionen und Berechnungen werden hier anschaulich motiviert, und es wird jeweils nur knapp angedeutet, wie man dies mathematisch sauberer definieren müsste.

Den Abschluss dieses Kapitels bildet eine kurze Erläuterung des mathematischen Begriffs des Lebesgue-Integrals. Für die meisten Physiker ist dies zwar nicht wirklich wesentlich – aber zumindest mathematisch Interessierte sollten es sich einmal durchlesen, um die Hintergründe zu diesem Kapitel besser zu verstehen.

2.1 Wegintegrale

Eine Kurve in der Ebene oder im Raum kann dadurch beschrieben werden, dass der Ortsvektor von einem Parameter abhängt; wie üblich setzen wir voraus, dass diese Abhängigkeit genügend „gutartig" ist. (Es genügt, wenn die Funktion zumindest stückweise „glatt", d. h. stetig differenzierbar ist.) Insbesondere bei einer Bahnkurve eines Teilchens wählt man als Parameter meist die Zeit t, also $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$. Hat man statt der Zeit einen anderen Parameter, so läuft die Rechnung natürlich völlig analog.

Will man nun beispielsweise die Arbeit wissen, die ein Kraftfeld $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r})$ an dem Teilchen verrichtet, während es auf dieser Bahn fliegt, so teilt man sich die Bahn in infinitesimale Wegstücke $\mathbf{d}\boldsymbol{r}$ auf (vgl. Abb. 2.1). Man berechnet nun zunächst für jedes dieser Wegstücke die (ebenfalls infinitesimale) Arbeit, also $\mathrm{d}W = \boldsymbol{K}(\boldsymbol{r}) \circ \mathbf{d}\boldsymbol{r}$,

B. Feuerbacher, *Tutorium Mathematische Methoden der Elektrodynamik*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-58340-1_2

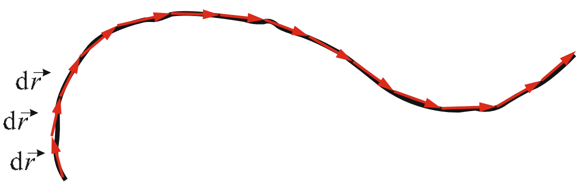

Abb. 2.1 Um ein Integral einer Größe längs einer Kurve zu berechnen, denkt man sich diese in infinitesimale Wegstücke $\mathbf{d}\boldsymbol{r}$ aufgeteilt

und summiert dann alle auf. Dies schreibt man kurz als das Integral

$$\int_{\boldsymbol{r}_a}^{\boldsymbol{r}_b} \boldsymbol{K}(\boldsymbol{r}) \circ \mathbf{d}\boldsymbol{r},$$

wobei $\boldsymbol{r}_a$ bzw. $\boldsymbol{r}_b$ die Ortsvektoren der Anfangs- bzw. Endpunkte der Bahn sind, und bezeichnet es als das *Wegintegral* über $\boldsymbol{K}$ von $\boldsymbol{r}_a$ nach $\boldsymbol{r}_b$. Andere übliche Bezeichnungen sind hier auch „Kurvenintegral“ oder „Linienintegral“, manche Autoren schreiben auch „Pfadintegral“ – Letzteres ist aber eigentlich etwas anderes!

Nochmals mathematisch etwas sauberer definiert: Wir nähern die Bahnkurve von $\boldsymbol{r}_a$ bis $\boldsymbol{r}_b$ an durch einen jeweils stückweise geraden Weg, der durch die Vektoren $\Delta\boldsymbol{r}_j$ beschrieben wird mit $1 \leq j \leq n$ (die nicht notwendigerweise alle gleich lang sein müssen). Es gilt also: Es gibt Punkte mit Ortsvektoren $\boldsymbol{r}_1 \equiv \boldsymbol{r}_a, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_{n+1} \equiv \boldsymbol{r}_b$ auf der Kurve, sodass $\Delta\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_a$, $\Delta\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_2, \ldots, \Delta\boldsymbol{r}_n = \boldsymbol{r}_b - \boldsymbol{r}_n$ ist. Dann definieren wir

$$\int_{\boldsymbol{r}_a}^{\boldsymbol{r}_b} \boldsymbol{K}(\boldsymbol{r}) \circ \mathbf{d}\boldsymbol{r} := \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{K}(\boldsymbol{r}_j) \circ \Delta\boldsymbol{r}_j, \tag{2.1}$$

wobei im Grenzwert unendlich vieler Punkte die Längen *aller* $\Delta\boldsymbol{r}_i$ gegen null gehen sollen. (Dass dieser Grenzwert überhaupt existiert, setzen wir als Physiker mal wieder stillschweigend voraus.)

Ist die Bahnkurve geschlossen, sind also Anfangs- und Endpunkt identisch, so schreibt man meist

$$\oint \boldsymbol{K}(\boldsymbol{r}) \circ \mathbf{d}\boldsymbol{r}$$

und nennt dies ein *geschlossenes* Wegintegral oder auch die *Zirkulation* von $\boldsymbol{K}$, manchmal auch die „Wirbelstärke“. (Der Grund für letztere Bezeichnung wird erst beim Satz von Stokes in Abschn. 3.2 klar werden.)