1 Grundzutaten und Basisrezepte

Übersicht

Bunt gemischte Grundzutaten

Es gibt einige Zutaten, die wir in unseren späteren Kochrezepten immer wieder benötigen werden. Dabei handelt es sich zum Teil um physikalische Begriffe, viel mehr aber noch um mathematische Konzepte und Techniken. Natürlich kann und will diese knappe Einführung weder eine Physik-Grundlagen-Vorlesung noch eine fundierte Mathematik-Ausbildung ersetzen. Wer das Gefühl hat, in einem der beiden Bereiche noch ernsthafte Defizite zu haben, für den gibt es hervorragende Bücher, um solche Lücken zu füllen, beispielsweise:

Mathematische Grundlagen

Arens et al.: *Mathematik* [Arens15]

Lang/Pucker: *Mathematische Methoden in der Physik* [Lang16]

Physikalische Grundlagen

Tipler/Mosca: *Physik: für Wissenschaftler und Ingenieure* [Tipler14]

Gerthsen/Meschede: *Gerthsen Physik* [Gerthsen15]

Halliday/Resnick/Walker: *Halliday Physik* [Halliday09]

Hierbei handelt es sich jeweils um Übersichtswerke, die die Grundlagen recht vollständig vermitteln. Zur Vertiefung von einzelnen Themen wird natürlich schnell speziellere Literatur notwendig. Einen schnellen Überblick in Form meist zweiseitiger Essays über zahlreiche Gebiete der Physik bietet:

Lichtenegger: *Schlüsselkonzepte zur Physik* [Lichtenegger15]

C. Albert, K. Lichtenegger, *Physikalische Rezepte: Mechanik*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-57297-9_1

Wir werden hier nur auf einige Themen eingehen, bei denen wir der Meinung sind, dass eine kurze Wiederholung sinnvoll ist. Wer in diesen Bereichen sattelfest ist, kann dieses Einführungskapitel natürlich unbesorgt überspringen und sich sofort auf die eigentlichen Mechanik-Rezepte stürzen. Konkret behandeln wir:

- Quadratische Gleichungen und komplexe Zahlen (S. 3): Quadratisches Ergänzen und Lösungsformel, Rechenregeln für komplexe Zahlen,
- einige geometrische Zutaten (S. 4): insbesondere Beziehungen zwischen Winkeln, zudem ein wenig Trigonometrie,
- Ableitungen und Integrale (S. 5): Allgemeines zu Ableitungen, Ableitungs- und Integrationsregeln sowie einige Seiten zu Reihenentwicklungen, d.h. zum Satz von Taylor,
- Gewöhnliche Differentialgleichungen (S. 11): Struktur von Differentialgleichungen, insbesondere Linearität, direkte Integration, Einarbeitung von Anfangsbedingungen – siehe dazu auch Rezepte 1 und 2,
- Vektoren und Tensoren (S. 13): Allgemeines zum Vektor- und Tensorbegriff, elementare Regeln der Vektorrechnung.
  Als vertiefende Themen:
  - Koordinatensysteme und Indexschreibweise (S. 15),
  - Kronecker-Delta und Epsilon-Tensor (S. 16),
- Minibar der Matrizenrechnung (S. 18): Elementare Rechenregeln für Matrizen, Transposition, Matrixmultiplikation, Besonderheiten quadratischer Matrizen (Spur, Determinante, inverse Matrix),
- Krummlinige Koordinatensysteme (S. 20): Umgang mit nichtkartesischen Koordinatensystem, insbesondere Zylinder- und Kugelkoordinaten.
  Als vertiefende Themen:
  - Integration in krummlinigen Koordinaten (S. 21),
  - Basisvektoren krummliniger Koordinatensysteme (S. 22),
- Vektoranalysis (S. 25):
  - Differentialoperatoren (S. 25): Definition, Darstellung in kartesischen Koordinaten, Zylinder- und Kugelkoordinaten,
  - Kurven- und Flächenintegrale (S. 27): Definition dieser Integrale, direkte Berechnung sowie Umformung mittels Integralsätzen,
- Fourier-Reihen (S. 29): Das Wichtigste zur Entwicklung von Funktionen in Fourier-Reihen, garniert mit einigen Informationen zu Vektorräumen von Funktionen,
- Variationsrechnung (S. 34): Einige Grundaufgaben sowie Herleitung der Euler-(Lagrange-)Gleichungen. Dieses Thema wird in Kapitel 3 und insbesondere in Rezept 10 noch wesentlich vertieft.
- Dimensionen und Einheiten (S. 36): der Nutzen von Dimensionsanalysen

Quadratische Gleichungen und komplexe Zahlen

Die Mechanik ist prinzipiell eine „reelle" Theorie (im Gegensatz etwa zur Quantenmechanik, die am natürlichsten und elegantesten im Komplexen formuliert werden kann). Insbesondere beim Lösen von Gleichungen kann man aber in der Mechanik zwischendurch auf komplexe Zahlen stoßen.

Während lineare Gleichungen oder Gleichungssysteme mit reellen Koeffizienten stets reelle Lösungen haben (oder gar keine), ist das schon bei quadratischen Gleichungen nicht mehr der Fall. Eine so einfache Gleichung wie $x^2 = a$ hat, wenn $a < 0$ ist, für x keine reelle Lösung mehr. Stattdessen erhält man die beiden imaginären Lösungen $x_{1,2} = \pm\mathrm{i}\sqrt{-a} = \pm\mathrm{i}\sqrt{|a|}$ mit $\mathrm{i}^2 = -1$. Dabei nennt man i die imaginäre Einheit.

Allgemein hat die quadratische Gleichung

$$x^2 + px + q = 0 \tag{1.1}$$

zwei Lösungen der Form[1]

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}. \tag{1.2}$$

Ist $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$, dann erhält man komplexe Lösungen. Diese sollten einen nicht beunruhigen. Bei der Behandlung der Schwingungsgleichung (siehe Rezept 17) gelangt man zu quadratischen Gleichungen, bei denen erst imaginäre oder komplexe Lösungen „echte" Schwingungen beschreiben.

Ganz knapp wollen wir einige Eigenschaften komplexer Zahlen zusammenfassen:

Normal-/Polardarstellung:	$z = x + \mathrm{i}y = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ mit $\tan\varphi = \frac{y}{x}$
konjugiert komplexe Zahl:	$\bar{z} = x - \mathrm{i}y = r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$
Betrag:	$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\,\bar{z}}$
Eulersche Formel:	$\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi \pm \mathrm{i}\sin\varphi$
Multiplikation:	$z_1 z_2 = x_1x_2 - y_1y_2 + \mathrm{i}\,(x_1y_2 + x_2y_1) = r_1\,r_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)}$
Division:	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{r_2^2} = \frac{r_1}{r_2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1-\varphi_2)}$
Wurzeln ($w^n = z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$):	$w_k = \sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\varphi+2\pi k}{n}}$ mit $k = 0, 1, \ldots n-1$

[1] Diese Formel erhält man durch die Technik des quadratischen Ergänzens, die ganz allgemein sehr nützlich ist. Man erweitert (1.1) dabei zu

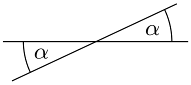
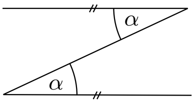
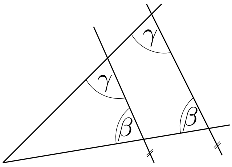
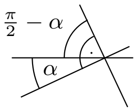
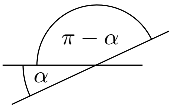
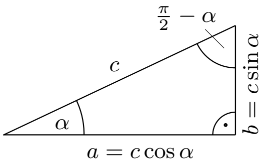
$$x^2 + 2\,\frac{p}{2}x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0$$

und schreibt das weiter als $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$, woraus schnell (1.2) folgt. Quadratisches Ergänzen ist vor allem dann wichtig, wenn man es mit quadratischen *Ungleichungen* zu tun hat, wo Lösungsformeln für Gleichungen nicht viel helfen.

Einige geometrische Zutaten

Mechanik erfordert Kenntnisse und Verständnis der Geometrie, vor allem der Trigonometrie. Das wird insbesondere beim Zerlegen von Kräften wichtig, siehe Rezept 4. Winkel geben wir meist in Radiant an, manchmal auch in Grad ($\pi = 180°$). Beim Verwenden eines Taschenrechners sollte man immer aufpassen, dass das richtige Winkelmaß eingestellt ist (RAD bzw. DEG).

Einige wesentliche Regeln für den Umgang mit Winkeln sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt[2]:

	X-Regel: Gegenüberliegende Winkel bei sich schneidenden Geraden sind gleich.
	Z-Regel: Die jeweiligen Winkel zwischen einer Gerade und parallelen Geraden sind gleich.
	Strahlensatz: In Dreiecken, die durch das Schneiden mit parallelen Geraden erzeugt werden, sind die jeweils korrespondierenden Winkel gleich groß.
	Komplementärwinkel: Ergänzender Winkel zum rechten Winkel ist $\pi/2 - \alpha \equiv 90° - \alpha$.
	Supplementärwinkel: Ergänzender Winkel an einer Geraden ist $\pi - \alpha \equiv 180° - \alpha$.
	Rechtwinkeliges Dreieck: Gegenüberliegender Winkel ist $\pi/2 - \alpha \equiv 90° - \alpha$. Seitenlängen kann man durch Winkelfunktionen $\cos\alpha = a/c$ und $\sin\alpha = b/c$ ausdrücken. Satz des Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$ bzw. $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

[2] Wie im Anhang von F. Willes Buch *Humor in der Mathematik* [Wille84] überzeugend erläutert, gibt es aus didaktischer Sicht ja nur ein „allgemeines" spitzwinkeliges Dreieck (sprich eines, das für eine ausreichend große Mehrheit weder rechtwinkelig noch gleichschenkelig aussieht), nämlich jenes mit den Winkeln 45°, 60° und 75°.

Ableitungen und Integrale

Ableitungen als „Änderungsraten“ sind in der gesamten theoretischen Physik eine wesentliche Zutat. Immerhin sind für uns üblicherweise jene Situationen interessant, in den sich etwas ändert – oft der Ort oder die Geschwindigkeit eines Körpers.

In der Mechanik ist es üblich, zeitliche Ableitungen mit einem Punkt zu schreiben,

$$\dot{u}(t) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\,,$$

eine Notation, die noch auf Newton selbst zurückgeht.[3] Für alle anderen Variablen verwenden wir bei Bedarf die „Strich-Schreibweise“, beispielsweise

$$f'(y) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}\,.$$

Allerdings können Striche auch für andere Zwecke benutzt werden, etwa um spezielle Variablen oder Bezugssysteme zu kennzeichnen. Höhere Ableitungen werden mit mehreren Punkten/Strichen, mit eingeklammerten Hochzahlen oder mit römischen Ziffern geschrieben, z.B. $f'''' = f^{(4)} = f^{\mathrm{IV}}$.

Die zentralen Ableitungsregeln setzen wir, ebenso wie die gängigen Integrationstechniken (siehe S. 7), als bekannt voraus; eine sehr knappe Übersicht bietet Tab. 1.1. Als besonders kritisch hat sich erfahrungsgemäß die Kettenregel erwiesen. Sie wird häufig nicht (oder nicht vollständig) beachtet, was natürlich zu entsprechenden Fehlern führt.

Man sollte sich angewöhnen, die Ableitungsregeln bei Bedarf auch in die andere Richtung lesen zu können. Ein in der Mechanik besonders wichtiges Beispiel ist das Produkt $x\,\dot{x}$, wobei x eine Funktion der Zeit ist. Erinnert man sich, dass ja $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x^2 = 2\,x\,\dot{x}$ ist, so kann man sofort

$$x\,\dot{x} = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x^2$$

schreiben, was manchmal sehr nützlich ist. Völlig analog gilt auch

$$\dot{x}\,\ddot{x} = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{x}^2.$$

Interpretiert man x als Ort und entsprechend $v = \dot{x}$ als Geschwindigkeit, so steht auf der rechten Seite dieser Gleichung die Ableitung von etwas, das bereits sehr an den Ausdruck für die kinetische Energie erinnert. Das ist, soviel sei hier schon verraten, kein Zufall.

[3] Die wesentliche flexiblere „d-Schreibweise“ hingegen wurde von Newtons Kontrahenten Leibniz eingeführt.

Tabelle 1.1 Ableitungsregeln und Ableitungen elementarer Funktionen. Diese Tabelle kann natürlich auch zum Auffinden von Stammfunktionen genutzt werden – dabei muss allerdings eine etwaige Integrationskonstante berücksichtigt werden.

Regel / Art der Funktion	**Funktion** (von x)	**Ableitung**
Produktregel	$f(x)\,g(x)$	$f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$
Kettenregel	$f(g(x))$	$f'(g(x))\,g'(x)$
Quotientenregel	$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{u'(x)\,v(x) - u(x)\,v'(x)}{v(x)^2}$
Potenzen	x^α	$\alpha\,x^{\alpha-1}$
Exponentialfunktion	e^x	e^x
(mit Basis $a > 0$)	a^x	$a^x\,\ln a$
Natürlicher Logarithmus	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
Logarithmus zur Basis $a > 0$	$\log_a x$	$\frac{1}{\ln a}\,\frac{1}{x}$
Winkelfunktionen	$\sin x$	$\cos x$
	$\cos x$	$-\sin x$
	$\tan x$	$1 + \tan^2 x$
Arkusfunktionen	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
Hyperbelfunktionen	$\sinh x$	$\cosh x$
	$\cosh x$	$\sinh x$
	$\tanh x$	$1 - \tanh^2 x$
Areafunktionen	$\operatorname{Arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
	$\operatorname{Arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
	$\operatorname{Artanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$

Gelegentlich haben wir es auch mit partiellen Ableitungen zu tun, die mit ∂ statt d geschrieben werden. Sie werden gebildet, indem beim Ableiten jeweils alle anderen Variablen festgehalten werden. Manchmal, z.B. in der Strömungsmechanik, benötigt man zudem die totale Ableitung (zum Symbol „∇“ siehe S. 25):

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\nabla_{\boldsymbol{x}} f) \cdot \dot{\boldsymbol{x}} \tag{1.3}$$

Integrationsregeln

Aus den Ableitungsregeln, die in Tab. 1.1 zusammengestellt sind, ergeben sich jeweils auch Integrationsregeln. Zum Teil gibt es jedoch Spezialfälle oder auch nur Schreibweisen, die an die Integration angepasst sind. So ergibt sich aus der Ableitung des Logarithmus und der Kettenregel mit einer einfachen Fallunterscheidung die Regel der logarithmischen Integration:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C, \qquad \text{wenn } f(x) \neq 0$$

Aus der Produktregel folgt die Regel der partiellen Integration:

$$\int u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)\,v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x$$

Diese kann auch manchmal nützlich sein, wenn man die Stammfunktion einer einzelnen Funktion f sucht:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\cdot 1\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{cc} u = f(x) & v'(x) = 1 \\ u' = f'(x) & v(x) = x \end{array}\right| = x\,f(x) - \int x\,f(x)\,\mathrm{d}x$$

Aus der Kettenregel schließlich folgt die Möglichkeit, Integrale mittels Substitution zu lösen, d.h. indem man eine neue Integrationsvariable $u = u(x)$ einführt und das Differential mittels $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\,\mathrm{d}u = \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)^{-1}\mathrm{d}u$ umschreibt. Bei bestimmten Integralen müssen die Grenzen entweder umgerechnet werden oder man führt nach Integration eine Rücksubstitution mit der Umkehrfunktion $x = x(u)$ durch.

Substitution ist wohl die flexibelste aller Integrationstechniken, aber nicht ohne Tücken. Zu erkennen, welcher Ausdruck am besten substituiert wird, braucht oft Intuition oder Erfahrung. Zudem muss man darauf achten, dass die Funktion $u = u(x)$, die substituiert wird, im relevanten Intervall streng monoton ist, was etwa durch $u'(x) \neq 0$ sichergestellt wird.

Zum Vorkochen

a) Die Funktion Φ ist mittels

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\,\mathrm{d}t$$

definiert und nicht durch elementare Funktionen ausdrückbar.
Bestimmen Sie $\int \Phi(x)\,\mathrm{d}x$.

b) Finden Sie den Fehler, der sich in folgender Rechnung eingeschlichen hat:

$$I = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{\sin^2 x} \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{cc} u = \sin^2 x & \pi \to 0 \\ \mathrm{d}u = \cos x\,\mathrm{d}x & 0 \to 0 \end{array}\right| = \int_0^0 \mathrm{e}^{(u^2)}\sqrt{1-u^2}\,\mathrm{d}u = 0$$

Der Satz von Taylor

Auch wenn manche anderes behaupten mögen, so versucht man in der theoretischen Physik doch meist, die Dinge so einfach wie (sinnvoll) möglich zu halten. Das beginnt schon bei den Funktionen, mit denen man arbeitet. Besonders einfache Funktionen sind die Polynome, die wiederum die (affin-)linearen Funktionen als Spezialfall enthalten.[4] Polynome lassen sich ganz einfach differenzieren und, noch viel wichtiger, ebenso einfach integrieren. Das Produkt zweier Polynome ist wieder ein Polynom und sogar, wenn man ein Polynom in ein anderes einsetzt, erhält man wieder ein Polynom.

Durchaus verständlich also, dass die Perspektive verführerisch ist, andere Funktionen in guter Näherung durch Polynome ersetzen zu können. Interpolationspolynome sind hierfür in manchen Fällen (z.B. für numerische Integration) durchaus gut geeignet, haben aber auch einige Schwachstellen.

In der theoretischen Physik verwendet man daher für ausreichend oft differenzierbare Funktionen (und das sind die meisten, mit denen man es zu tun hat) am liebsten die Entwicklung in Taylor-Reihen. Ist von *Reihenentwicklung* ohne weitere Erklärung die Rede, so sind im Normalfall Taylor-Reihen gemeint. Meist bricht man diese Entwicklung nach der ersten oder höchstens zweiten Ordnung ab, arbeitet also nur mit Polynomen höchstens zweiten Grades.

Die Idee hinter dem Satz von Taylor ist ebenso einfach wie genial: Ein Polynom $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ wird eine Funktion dann in der Nähe von $x = 0$ wohl dann besonders gut annähern, wenn die Ableitungen der Funktion und des Polynoms an dieser Stelle übereinstimmen:[5]

$$
\begin{aligned}
p(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n & p(0) = a_0 &\stackrel{!}{=} f(0)\\
p'(x) &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^3 + \ldots + n\, a_n x^{n-1} & p'(0) = a_1 &\stackrel{!}{=} f'(0)\\
p''(x) &= 2a_2 + 3\cdot 2\, a_3 x^3 + \ldots + n\,(n-1)\, a_n x^{n-2} & p''(0) = 2a_2 &\stackrel{!}{=} f''(0)\\
&\vdots & &\vdots\\
p^{(n)}(x) &= \underbrace{n\,(n-1)\ldots 2\cdot 1}_{=n!}\, a_n & p^{(n)}(0) = n!\, a_n &\stackrel{!}{=} f^{(n)}(0)
\end{aligned}
$$

[4] Der Begriff „affin-linear“ mag für manche ungewohnt sein und seine Verwendung penibel wirken. Meist werden Polynome ersten Grades, d.h. Funktionen der Form $f(x) = a_0 + a_1 x$, einfach als „lineare Funktionen“ bezeichnet. Da sie für $a_0 \neq 0$ jedoch die Linearitätsbedingung $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ nicht erfüllen, ist das keine völlig korrekte Bezeichnungsweise. Der Begriff „affin-linear“ bedeutet „linear bis auf eine mögliche additive Konstante“ und beschreibt damit genau Polynome ersten Grades.

[5] Die Wahl $x = 0$ ist reine Bequemlichkeit, weil so die Formeln besonders übersichtlich werden. Es ist überhaupt kein Problem, die gesamte Argumentation auf eine andere *Entwicklungsmitte* x_0 zu übertragen, wenn man entsprechend ein Polynom in $(x - x_0)$ verwendet.

Für den k-ten Koeffizienten des Taylor-Polynoms, d.h. den Vorfaktor von x^k, ergibt sich demnach:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \tag{1.4}$$

Lässt man die Ordnung n des Polynoms gegen Unendlich gehen, so erhält man – wenn die Funktion f beliebig oft differenzierbar ist und die ganze Sache überhaupt konvergiert – die entsprechende Taylor-Reihe. Die Reihenentwicklungen einiger wichtiger Funktionen sind in Tab. 1.2 zusammengestellt.

Eine Frage, die mathematisch bedeutsam ist, uns jedoch meist nur am Rande interessiert, lautet: Wie groß ist der Bereich, in dem die ursprüngliche Funktion durch ihre Taylor-Reihe dargestellt wird? Die Restgliedabschätzungen, um das herauszufinden, sind meist eher mühsam. Oft reicht es jedoch schon aus, zwei Dinge zu wissen:

1. Das Konvergenzgebiet ist ein Kreis in der komplexen Ebene um die Entwicklungsmitte (von dem man im Reellen natürlich nur ein Intervall sieht).[6]

2. Die Konvergenz kann höchstens bis zur ersten „Problemstelle“ (meist eine Singularität) reichen, und meist tut sie das auch.

So konvergieren etwa die Reihen für die beiden Funktionen

$$f_1(x) = \frac{1}{1-x^2} \qquad \text{und} \qquad f_2(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

beide nur im Intervall $(-1, 1)$. Bei f_1 ist es offensichtlich, dass es bei $x = \pm 1$ „Probleme“ gibt und die Konvergenz der Reihe dort enden muss. Doch auch f_2 hat im Abstand $|x| = 1$ Schwierigkeiten, nämlich bei $x = \pm\mathrm{i}$, und auch diese stoppen die Konvergenz der Reihe.

Die Koeffizienten eines Taylor-Polynoms lassen sich natürlich mit (1.4) berechnen. Oft geht es jedoch wesentlich schneller und bequemer, ein solches Polynom aus einer schon bekannten Reihenentwicklung zu ermitteln als mühsam abzuleiten und einzusetzen. So erhält man etwa das Taylor-Polynom sechster Ordnung für $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ sofort aus der Reihendarstellung der Exponentialfunktion:

$$p_6(x) = 1 + \left(-x^2\right) + \frac{1}{2}\left(-x^2\right)^2 + \frac{1}{6}\left(-x^2\right)^3 = 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{6}x^6$$

Aufpassen muss man bei diesem Vorgehen natürlich, dass Entwicklungsstelle und Funktionswerte zusammenpassen.

Zum Vorkochen

Bestimmen Sie das Taylor-Polynom dritten Grades der Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\sin x}}$ um die Stelle $x = 0$. Wie groß kann der Konvergenzradius der entsprechenden Taylor-Reihe höchstens sein?

---

[6] Welche Teile des Kreisrandes noch zum Konvergenzbereich gehören und ob das insbesondere die Randpunkte des reellen Intervalls tun, muss man jeweils gesondert untersuchen.

Tabelle 1.2 Wichtige Reihenentwicklungen einiger elementarer Funktionen, die sich mit dem Satz von Taylor ermitteln lassen. Hilfreich ist es vor allem, sich die Terme bis zur quadratischen Ordnung zu merken – Terme höherer Ordnung werden in der Mechanik nur selten benötigt.

Funktion (von x)	**Reihenentwicklung** (um $x = 0$)	**Konv. in**
e^x	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \dots$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \mp \dots$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} \pm \dots$	$\mathbb{R}$
$\sinh x$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots$	$\mathbb{R}$
$\cosh x$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + \dots$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}\left(2^{2n}-1\right) B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1} = x + \frac{x^3}{3} + \dots$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$\ln(1+x)$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \dots$	$(-1, 1)$
$\arcsin x$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)\, 2^n n!} x^{2n+1} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3\,x^5}{40} + \dots$	$(-1, 1)$
$\arcsin x$	$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x \overset{\text{s.o.}}{=} \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \dots$	$(-1, 1)$
$\arctan x$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \dots$	$(-1, 1)$
$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots$	$(-1, 1)$
$\frac{1}{\sqrt{1+x}}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\,(2n-1)!!}{2^n\, n!} x^n = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} \mp \dots$	$(-1, 1)$

Dabei haben wir einerseits für $n \in \mathbb{Z}$ die Abkürzung

$$n!! = \begin{cases} n\,(n-2)\cdots 1 & \text{wenn } n \text{ positiv und ungerade} \\ n\,(n-2)\cdots 2 & \text{wenn } n \text{ positiv und gerade} \\ 1 & \text{wenn } n \text{ gleich null oder negativ} \end{cases}$$

verwendet, andererseits für $n \in \mathbb{N}_0$ die Bernoulli-Zahlen B_n, die sich rekursiv aus der folgenden Beziehung ermitteln lassen:

$$B_0 = 1, \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k = 0$$

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Differentialgleichungen sind Gleichungen, die Funktionen und ihre Ableitungen verknüpfen. Die Lösung einer solchen Gleichung ist nicht nur eine Zahl, sondern eine Funktion, meist sogar eine ganze Schar von Funktionen. Mit *Differentialgleichung* ist bei uns normalerweise eine *gewöhnliche Differentialgleichung* gemeint, in der die gesuchte Funktion $u(t)$ nur von einer einzelnen Variablen t (meist der Zeit) abhängt. Partielle Differentialgleichungen, in denen eine gesuchte Funktion von mehreren Variablen abhängen kann, streifen wir in diesem Buch nur am Rande (etwa beim Bestimmen von Potentialen, siehe Rezept 5 oder bei der Lösung der Saitenschwingungsgleichung, siehe Rezept 16).

Zum Lösen von Differentialgleichungen existieren vielfältige Methoden, von denen der Großteil nur für jeweils sehr spezielle Formen von Gleichungen anwendbar ist. Zum Glück sind die meisten Differentialgleichungen, mit denen wir es zu tun haben, vergleichsweise gutmütig. Viele sind linear (oder lassen sich sinnvoll linearisieren, siehe Rezept 14) – und für lineare Differentialgleichungen existiert eine gut ausgebaute Systematik.

Wichtig ist es allerdings, erkennen zu können, ob eine Differentialgleichung linear ist. Dafür dürfen die gesuchte Funktion u selbst, ihre Ableitung $\dot{u}$ sowie etwaige höhere Ableitungen jeweils nur in erster Potenz vorkommen. Es darf auch keine gemischten Produkte wie z.B. $u\,\dot{u}$ geben und u bzw. Ableitungen davon dürfen nicht als Argument einer transzendenten Funktion (Exponentialfunktion, Winkelfunktionen, Logarithmus, ...) auftreten.[7] Damit hat eine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung für die Funktion $u = u(t)$ die Form

$$a_n(t)\,u^{(n)} + \ldots + a_2(t)\,\ddot{u} + a_1(t)\,\dot{u} + a_0(t)\,u = g(t) \tag{1.5}$$

bzw. in der manchmal nützlichen Operatorschreibweise

$$\underbrace{\left(a_n(t)\,\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} + \ldots + a_2(t)\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + a_1(t)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + a_0(t)\right)}_{=\mathcal{L}}\,u = g(t)\,. \tag{1.6}$$

https://www.springer.com/de/book/9783662572962

Physikalische Rezepte: Mechanik
Christopher Albert, Klaus Lichtenegger
1.Aufl. 2018, VIII, 226 S.
ISBN: 978-3-662-57296-2