

# Mathematische Vorbereitungen

# 1

1.1	Dirac'sche $\delta$ -Funktion	2
1.2	Taylor-Entwicklung	7
1.3	Flächenintegrale	12
1.3.1	Orientierte Flächenelemente	12
1.3.2	Flächenintegrale	16
1.4	Differenzierungsprozesse für Felder	19
1.4.1	Integraldarstellung der Divergenz	19
1.4.2	Integraldarstellung der Rotation	22
1.5	Integralsätze	26
1.5.1	Der Gauß'sche Satz	26
1.5.2	Der Stokes'sche Satz	29
1.5.3	Die Green'schen Sätze	33
1.6	Zerlegungs- und Eindeutigkeitsatz	34
1.6.1	Zerlegungssatz	36
1.6.2	Eindeutigkeitsatz	38
1.7	Aufgaben	40
	Kontrollfragen	47

Wir wollen in diesem Kapitel zunächst die für praktische Anwendungen wichtige Dirac'sche  $\delta$ -Funktion einführen. Es folgen Betrachtungen über Taylor-Entwicklungen für Felder und über Flächenintegrale. Anschließend setzen wir uns mit der Vektoranalysis auseinander.

## 1.1 Dirac'sche $\delta$ -Funktion

Um die Einführung der  $\delta$ -Funktion zu motivieren, denken wir an die Klassische Mechanik zurück. Das *Konzept des Massenpunktes* hatte sich unter bestimmten Voraussetzungen als recht nützlich erwiesen. Der Schwerpunktsatz (s. Abschn. 3.1.1, Bd. 1) besagt z. B., dass sich der Schwerpunkt eines Massenpunktsystems so bewegt, als ob die gesamte Masse in ihm vereinigt wäre und alle äußeren Kräfte allein auf ihn wirken würden. Nach (s. (4.4), Bd. 1) lässt sich die Masse  $M$  eines Körpers über ein Volumenintegral durch die Massendichte  $\rho(\mathbf{r})$  ausdrücken:

$$M = \int_V d^3r \rho(\mathbf{r}) .$$

Wie sieht nun aber die Massendichte eines Massenpunktes aus? Sie darf nur in einem Punkt von Null verschieden sein,

$$\rho(\mathbf{r}) = 0 \quad \forall \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0 ,$$

das Volumenintegral

$$\int_V d^3r \rho(\mathbf{r})$$

soll jedoch trotzdem endlich sein, falls  $\mathbf{r}_0$  im Volumen  $V$  liegt. Wir symbolisieren  $\rho(\mathbf{r})$  deshalb wie folgt:

$$\rho(\mathbf{r}) = M \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \tag{1.1}$$

und fordern:

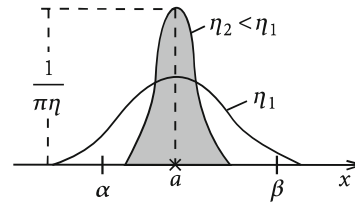
$$\int_V d^3r \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \mathbf{r}_0 \in V \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \tag{1.2}$$

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0 \quad \forall \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0 . \tag{1.3}$$

Gleichungen (1.2) und (1.3) sind die Definitionsgleichungen für die Dirac'sche  $\delta$ -Funktion (kurz:  $\delta$ -Funktion). Man darf das Integral (1.2) offensichtlich nicht als gewöhnliches

## 1.1 Dirac'sche $\delta$ -Funktion

**Abb. 1.1** Veranschaulichung der  $\delta$ -Funktion als Grenzfunktion einer Folge von Lorentz-Kurven



Riemann-Integral verstehen. Da wegen (1.3) das effektive Integrationsintervall die Breite Null hat, müsste das Integral eigentlich verschwinden. Man hilft sich deshalb manchmal mit der Vorstellung, dass für  $r = r_0$  die  $\delta$ -Funktion den Wert  $\infty$  annimmt, sodass aus  $0 \cdot \infty$  etwas Endliches resultiert. Dies ist lediglich eine Hilfsvorstellung. Die  $\delta$ -Funktion ist keine Funktion im üblichen mathematischen Sinne, die jedem Wert ihres Argumentes einen bestimmten Funktionswert zuordnet. Sie ist vielmehr durch die Gleichungen (1.2) und (1.3) **definiert**. Man bezeichnet sie deshalb als **uneigentliche** Funktion oder als **Distribution**. Die zugehörige exakte mathematische Theorie heißt **Distributionstheorie**. Sie übersteigt den Rahmen unserer einführenden Darstellung, die sich mit Plausibilitätsbetrachtungen zufrieden geben muss. Dabei beschränken wir uns zunächst auf den eindimensionalen Fall.

Betrachten Sie eine Folge von **Lorentz-Kurven** (Abb. 1.1)

$$L_\eta(x-a) = \frac{1}{\pi} \frac{\eta}{\eta^2 + (x-a)^2}, \quad (\eta > 0). \quad (1.4)$$

Für die Höhe des Maximums bei  $x = a$  gilt

$$\frac{1}{\pi\eta} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0^+} \infty$$

und für die Breite des Peaks (*Halbwertsbreite*)

$$2\eta \xrightarrow{\eta \rightarrow 0^+} 0.$$

Die Fläche unter der Lorentz-Kurve beträgt

$$\int_\alpha^\beta dx \left[ \frac{1}{\pi} \frac{\eta}{\eta^2 + (x-a)^2} \right] = \frac{1}{\pi} \left[ \arctan\left(\frac{\beta-a}{\eta}\right) - \arctan\left(\frac{\alpha-a}{\eta}\right) \right]$$

$$\xrightarrow{\eta \rightarrow 0^+} \begin{cases} 1, & \text{falls } \alpha < a < \beta, \\ \frac{1}{2}, & \text{falls } a = \alpha \text{ oder } a = \beta, \\ 0 & \text{sonst } (a \neq \alpha, \beta). \end{cases}$$

Für  $\eta \rightarrow 0^+$  wird  $L_\eta$  unendlich schmal. Es ist deshalb:

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} L_\eta(x-a) = 0 \quad \forall x \neq a, \quad (1.5)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{\alpha}^{\beta} L_\eta(x-a) dx = \begin{cases} 1, & \text{falls } \alpha < a < \beta, \\ \frac{1}{2}, & \text{falls } a = \alpha \text{ oder } a = \beta, \\ 0 & \text{sonst } (a \neq \alpha, \beta). \end{cases} \quad (1.6)$$

Wichtig ist die Reihenfolge von Integration und Grenzübergang in (1.6), die **nicht** vertauscht werden darf. Wenn wir das beachten, können wir *abkürzend* schreiben:

$$\delta(x-a) = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \frac{\eta}{\eta^2 + (x-a)^2} \quad (1.7)$$

mit

$$\delta(x-a) = 0 \quad \forall x \neq a, \\ \int_{\alpha}^{\beta} dx \delta(x-a) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \alpha < a < \beta, \\ \frac{1}{2}, & \text{falls } a = \alpha \text{ oder } a = \beta, \\ 0 & \text{sonst } (a \neq \alpha, \beta). \end{cases} \quad (1.8)$$

Man kann die  $\delta$ -Funktion auch durch andere Grenzprozesse darstellen (s. Aufgaben!), wobei diese nur (1.5) und (1.6) erfüllen müssen.

Über (1.5) bis (1.7) verifiziert man die folgenden Eigenschaften der  $\delta$ -Funktion:

1.  $f(x)$  sei eine in der Umgebung von  $x = a$  stetige Funktion. Dann gilt:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \delta(x-a) dx = \begin{cases} f(a), & \text{falls } \alpha < a < \beta, \\ \frac{1}{2}f(a), & \text{falls } a = \alpha \text{ oder } a = \beta, \\ 0 & \text{sonst } (a \neq \alpha, \beta). \end{cases} \quad (1.9)$$

### Beweis

Mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung folgt zunächst:

$$F_\eta(a) = \int_{\alpha}^{\beta} L_\eta(x-a) f(x) dx = f(\xi) \int_{\alpha}^{\beta} L_\eta(x-a) dx, \quad \xi \in [\alpha, \beta].$$

Für  $\eta \rightarrow 0^+$  wird  $L_\eta(x-a)$  zu einem beliebig scharfen Peak um  $a$ .  $F_\eta(a)$  ändert sich nicht, wenn man das Integrationsintervall auf den Bereich beschränkt, in dem  $L_\eta$

von Null verschieden ist.  $\xi$  muss in diesem effektiven Integrationsbereich liegen, der sich für  $\eta \rightarrow 0^+$  auf den Punkt  $a$  zusammenzieht:

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} F_\eta(a) = f(a) \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_\alpha^\beta L_\eta(x-a) dx .$$

Mit (1.6) folgt dann (1.9).

2.

$$\delta[f(x)] = \sum_i \frac{1}{|f'(x_i)|} \delta(x - x_i) , \quad (1.10)$$

$x_i$ : **einfache** Nullstelle von  $f(x)$ ;  $f(x_i) = 0$ ;  $f'(x_i) \neq 0$ .

Den Beweis führen wir als Übung (Aufgabe 1.7.3). Man erkennt folgende Spezialfälle:

a)

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) , \quad (1.11)$$

b)

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|} [\delta(x - a) + \delta(x + a)] . \quad (1.12)$$

3.

$$g(x)\delta(x - a) = g(a)\delta(x - a) , \quad (1.13)$$

$$x\delta(x) = 0 . \quad (1.14)$$

4.

$$\int_{-\infty}^x d\bar{x} \delta(\bar{x}) = \Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 , \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} \quad (1.15)$$

**Stufenfunktion.**

5. **Ableitung** der  $\delta$ -Funktion [ $a \in (\alpha\beta)$ ]:

$$\int_\alpha^\beta \delta'(x-a)f(x) dx = f(x)\delta(x-a) \Big|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \delta(x-a)f'(x) dx = -f'(a) .$$

Diese *formale* partielle Integration führt, da  $f(x)$  lediglich differenzierbar sein muss, sonst aber beliebig sein darf, zu der folgenden Identität:

$$f(x)\delta'(x-a) = -f'(a)\delta(x-a) . \quad (1.16)$$

6. Man kann die  $\delta$ -Funktion auch als Ableitung der Stufenfunktion auffassen:

$$\delta(x - a) = \frac{d}{dx} \Theta(x - a) . \quad (1.17)$$

Es gilt nämlich:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dx} \Theta(x - a) dx = \Theta(x - a) \Big|_{\alpha}^{\beta} = \begin{cases} 1, & \text{falls } \alpha < a < \beta, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx} \Theta(x - a) = 0 \quad \forall x \neq a .$$

Dies sind aber die beiden Definitionsgleichungen der  $\delta$ -Funktion.

7. **Mehrdimensionale  $\delta$ -Funktion** Die dreidimensionale  $\delta$ -Funktion ist durch (1.2) und (1.3) definiert.

- a) **Kartesische Koordinaten:**

$$\mathbf{r} = (x, y, z) ; \quad \mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

$$\int_V d^3 r \dots \longrightarrow \iiint_V dx dy dz \dots$$

**Ansatz:**

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \gamma(x, y, z) \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) .$$

$\gamma(x, y, z)$  muss so gewählt werden, dass (1.2) erfüllt ist:

$$\begin{aligned} \int_V d^3 r \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) &= \iiint_V dx dy dz \gamma(x, y, z) \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) \\ &= \gamma(x_0, y_0, z_0) \iiint_V \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) dx dy dz \\ &= \begin{cases} \gamma(x_0, y_0, z_0) , & \text{falls } \mathbf{r}_0 \in V , \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases} \end{aligned}$$

Dies bedeutet:

$$\gamma = 1$$

und damit:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) . \quad (1.18)$$

b) **Krummlinige Koordinaten**  $(u, v, w)$ :

Nach ((1.367), Bd. 1) gilt für das Volumenelement:

$$d^3 r = dx dy dz = \underbrace{\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}}_{\text{Funktionaldeterminante}} du dv dw .$$

Wir machen einen ähnlichen **Ansatz** wie unter a):

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \gamma(u, v, w) \delta(u - u_0) \delta(v - v_0) \delta(w - w_0) . \quad (1.19)$$

Wegen (1.2) ist dann zu erfüllen:

$$\int_V d^3 r \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \iiint_V du dv dw \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \gamma(u, v, w) \delta(u - u_0) \cdot \delta(v - v_0) \delta(w - w_0) \stackrel{!}{=} 1 , \quad \text{falls } \mathbf{r}_0 \in V .$$

Daran lesen wir ab:

$$\gamma = \left( \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \Big|_{\mathbf{r}_0} \right)^{-1} . \quad (1.20)$$

**Beispiele:**

**Kugelkoordinaten**  $(r, \vartheta, \varphi)$  (s. (1.390), Bd. 1):

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \frac{1}{r_0^2 \sin \vartheta_0} \delta(r - r_0) \delta(\vartheta - \vartheta_0) \delta(\varphi - \varphi_0) . \quad (1.21)$$

**Zylinderkoordinaten**  $(\rho, \varphi, z)$  (s. (1.382), Bd. 1):

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \frac{1}{\rho_0} \delta(\rho - \rho_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \delta(z - z_0) . \quad (1.22)$$

Die große Bedeutung der  $\delta$ -Funktion für die Theoretische Physik wird sehr bald klar werden. Man sollte sich deshalb unbedingt mit ihr vertraut machen.

## 1.2 Taylor-Entwicklung

Häufig ist es für den Physiker unumgänglich, gewisse mathematische Funktionen in bestimmten, interessierenden Bereichen zu vereinfachen, um für ein gegebenes physikalisches Problem zu konkreten Resultaten zu gelangen. Diese Vereinfachung muss *physikalisch sinnvoll* sein, d. h., sie darf das eigentliche Resultat nicht zu grob verfälschen. Insbesondere wäre eine verlässliche Fehlerabschätzung wünschenswert.

Betrachten wir zunächst Funktionen einer Variablen  $f = f(x)$ . Wenn diese beliebig oft differenzierbar sind, was wir voraussetzen wollen, dann lassen sie sich häufig in eine so genannte **Potenzreihe**

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

entwickeln, wobei die Koeffizienten  $a_n$  durch das Verhalten der Funktion im Punkt  $x = 0$  bestimmt sind:

$$a_0 = f(0); \quad a_1 = f'(0); \quad a_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} f''(0); \quad \dots; \quad a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0); \quad \dots$$

Also gilt mit  $0! = 1! = 1$ :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n. \quad (1.23)$$

Man sagt, man habe  $f(x)$  in eine **Taylor-Reihe** um den Punkt  $x = 0$  entwickelt. Entscheidende Voraussetzung ist neben der beliebig häufigen Differenzierbarkeit, dass die Reihe konvergiert. Die Werte der Variablen  $x$ , für die das der Fall ist, definieren den **Konvergenzbereich** der Potenzreihe.

In einer **konvergenten** Reihe müssen notwendig die Beträge der Summanden mit wachsenden Potenzen der Variablen gegen Null gehen. Dies ermöglicht eine Näherung für  $f(x)$  durch Reihenabbruch nach endlich vielen Termen:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{n=0}^m a_n x^n}_{\text{Näherungspolynom } m\text{-ten Grades}} + \underbrace{R_m(x)}_{\text{Restglied}}. \quad (1.24)$$

Wann abgebrochen wird, hängt vom Genauigkeitsanspruch ab.

### Beispiel

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x, \\ (\sin x)^{(2n)} \Big|_{x=0} &= (-1)^n \sin 0 = 0, \\ (\sin x)^{(2n+1)} \Big|_{x=0} &= (-1)^n \cos 0 = (-1)^n. \end{aligned}$$

Das ergibt mit (1.23):

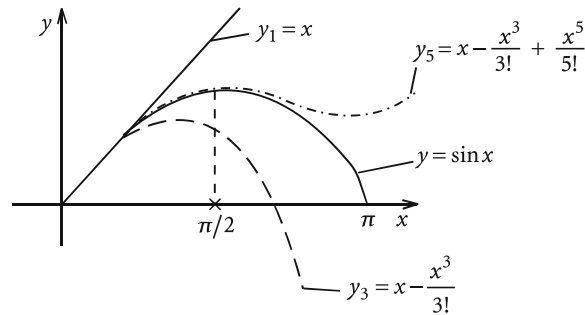
$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

Der Bereich befriedigender Näherung wächst offensichtlich mit  $n$  (Abb. 1.2).



## 1.2 Taylor-Entwicklung

**Abb. 1.2** Verschiedene Näherungen für die Sinusfunktion durch Mitnahme unterschiedlich vieler Terme der exakten Reihenentwicklung



Sinnvoll ist die Darstellung der Funktion  $f(x)$  durch ein Näherungspolynom natürlich nur dann, wenn

$$R_m(x) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Das ist in vielen praktischen Anwendungen leider nicht eindeutig vorhersagbar. Man kennt verschiedene Abschätzungen für das Restglied, z. B. die nach Lagrange:

$$R_m(x) = f^{(m+1)}(\xi) \frac{x^{m+1}}{(m+1)!}, \quad 0 < \xi < x. \quad (1.25)$$

Wir können den Wert  $\xi_0 \in (0, x)$ , bei dem die rechte Seite maximal wird, nehmen, um eine obere Schranke für  $R_m$  anzugeben.

Wollen wir  $f(x)$  statt um  $x = 0$  um eine beliebige Stelle  $x = x_0$  entwickeln, so muss (1.23) abgewandelt werden:

$$u = x - x_0 \Rightarrow f(x) = f(u + x_0) \equiv g(u).$$

$g(u)$  entwickeln wir um  $u = 0$ :

$$g(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} g^{(n)}(0) u^n,$$

$$g^{(n)}(0) = f^{(n)}(0 + x_0).$$

Die Verallgemeinerung zu (1.23) lautet also:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) (x - x_0)^n. \quad (1.26)$$

Für die Elektrodynamik wichtig ist die

- Taylor-Entwicklung von Feldern,

also von Funktionen mehrerer Veränderlicher.

Es sei  $\varphi(\mathbf{r})$  ein skalares Feld. Wir wollen  $\varphi(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r})$  um  $\mathbf{r}$  entwickeln:

$$\varphi(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) = \varphi(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3) \equiv F(t = 1).$$

Dabei haben wir definiert:

$$F(t) = \varphi(x_1 + \Delta x_1 t, x_2 + \Delta x_2 t, x_3 + \Delta x_3 t) = \varphi(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}t).$$

Nach (1.23) gilt:

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} F^{(n)}(0) t^n.$$

Über die Kettenregel folgt:

$$\begin{aligned} F'(0) &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \Delta x_j, \\ F''(0) &= \sum_{j,k} \Delta x_j \Delta x_k \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} \varphi(\mathbf{r}) \\ &= \left( \sum_j \Delta x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^2 \varphi(\mathbf{r}), \\ &\vdots \\ F^{(n)}(0) &= \left( \sum_j \Delta x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^n \varphi(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Damit folgt die **Taylor-Reihe** für skalare Felder:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \sum_{j=1}^3 \Delta x_j \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^n \varphi(\mathbf{r}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\Delta\mathbf{r} \cdot \nabla)^n \varphi(\mathbf{r}) \\ &= \exp(\Delta\mathbf{r} \cdot \nabla) \varphi(\mathbf{r}). \end{aligned} \tag{1.27}$$

Wir erhalten ein Näherungspolynom  $m$ -ten Grades für  $\varphi(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r})$ , wenn wir die Taylor-Reihe nach  $m$  Summanden abbrechen. Für das Restglied gilt nach (1.25):

$$R_m = R_m(t = 1) = F^{(m+1)}(\xi) \frac{1}{(m+1)!}, \quad 0 < \xi < 1.$$



<https://www.springer.com/9783642379048>

Grundkurs Theoretische Physik 3

Elektrodynamik

Nolting, Wolfgang

10. Aufl. 2013, XV, 677 S. 259 Abb., 12 Abb. in Farbe.

ISBN 978-3-642-37904-8